 Ebensperger

Gemeinfaßliche Geometrie
für Anfänger

oder

Formenlehre in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen als Vorübung im Linearzeichnen.

Ein Leitfaden

zum Gebrauche in Schullehrer=Seminarien, Gewerbsschulen und zum Selbstunterrichte für Gewerbtreibende und Alle, welche einen gründlichen Anfang in der Geometrie machen und beim Linearzeichnen des anzuwendenden Verfahrens sich vollständig bewußt werden wollen.

Von

Johann Leonhard Ebensperger,

Seminarlehrer in Altdorf.

Zweite

verbesserte, mit 420 Uebungsaufgaben vermehrte Auflage.

Mit 352 geometrischen Figuren auf 8 lithographirten Tafeln.

Nürnberg,

Verlag von J. L. Lotzbeck.

1852.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die vorliegende Geometrie ist wohl für Anfänger, aber nicht für Schulkinder bestimmt; darin mag die strenge Form, in welcher die Sätze abgehandelt werden, ihre Erklärung finden. Kein Freund vieler Worte, war ich bemüht, Alles möglichst kurz und bestimmt darzustellen; gestehe aber, daß namentlich in die Erklärungen oft Vieles hineingezogen wurde, was ein strenger Methodiker vielleicht in einzelnen §§. gesondert abgehandelt hätte. Ich wollte aber das Büchlein durch unnöthige Zersplitterung nicht zu umfangreich machen.

Keineswegs bin ich der Meinung, daß der nach diesem Leitfaden unterrichtende Lehrer seinen Schülern Satz für Satz vorsage oder gar diktire, sondern der Ansicht, daß der Lehrer möglichst entwickelnd verfahre. Der Leitfaden soll nur Anhaltspuncte für Lehrer und Lernende geben, und der Lehrer, nicht das Buch, muß die Seele des Unterrichtes sein.

Doch ist diese Geometrie so bearbeitet, daß sie recht wohl auch zum Selbststudium zu benützen ist, wenn nur Satz für Satz durchgedacht und zum Verständniß gebracht wird.

Möge nun dieses Büchlein zur weiteren Verbreitung geometrischer Kenntnisse beitragen, und möge den Lernenden die Auffassung der in demselben enthaltenen Sätze zum weiteren Forschen veranlassen und ihm so viele Freude verursachen, als dem Verfasser das Niederschreiben derselben geistiges Vergnügen bereitet hat.

Altdorf, am Schlusse der Herbstferien 1849.

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

In unerwartet kurzer Zeit hat sich die erste, ziemlich starke Auflage dieses Büchleins vergriffen, und ich benütze gerne die Gelegenheit, allen Herren Lehrern, die es bei ihrem Unterrichte als Leitfaden benützen und wodurch nun diese neue Auflage so bald nöthig geworden ist, meinen aufrichtigen Dank zu sagen.

Nicht weniger danke ich den Herren Recensenten, die das Büchlein einer Durchsicht würdigten und den Zweck, den ich mit demselben zu erreichen suchte, nicht mißkannten. — (Neuer badischer Schulbote, Nr. 4. 1851; — Zeitung des allgemeinen deutschen Lehrervereins Nr. 13 und 14. 1851; — Leipziger Repertorium, **IV.** 2. Heft; — Volksschulfreund, Jahrg. 15. Heft 2. Königsberg; — Volksschule, Monatsblätter für das Volksschulwesen, insbesondere des Königreichs Hannover. Juliheft 1851 u. a.)

Daß ich bemüht war, die gegebenen Winke möglichst zu benützen und die Mängel, die ich erkannte, zu beseitigen, wird ein Vergleich der zweiten mit der ersten Auflage erkennen lassen. Bei der Anordnung und Aufeinanderfolge der Sätze, theilweise mit Recht beanstandet, hielt ich mich großentheils an das zum tiefern Studium sehr zu empfehlende Buch: die Planimetrie und Stereometrie von C. Koppe.

Durch die Beifügung von Uebungsaufgaben habe ich den Wunsch mancher Recensenten erfüllt; der Preis des Büchleins soll aber nach dem Willen des Verlegers trotz der Vermehrung und der freundlichen Ausstattung nicht erhöht werden.

Altdorf, am Anfange der Herbstferien 1852.

Der Verfasser.

Inhalt.

		Seite
	Zeichen und Abkürzungen	1
I.	Einleitung	3
II.	Körper, Fläche, Linie, Punct, Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz im Allgemeinen	5
III.	Von Linien und Flächen in's Besondere	9
IV.	Von den Winkeln	13
	Uebungsaufgaben (1—15)	18
V.	Von den Parallellinien	19
	Uebungsaufgaben (16—22)	23
VI.	Von den Figuren im Allgemeinen	23
VII.	Von den Dreiecken	25
	A) Von den Winkeln und Seiten der Dreiecke	25
	B) Von der Congruenz der Dreiecke	28
	C) Von den rechtwinkligen Dreiecken	29
	D) Von den gleichschenkligen Dreiecken	30
	E) Aufgaben	31
	Uebungsaufgaben (23—50)	35
VIII.	Von den Vierecken	36
	A) Von den Vierecken im Allgemeinen	36
	B) Von den Parallelogrammen	37
	C) Vom Trapeze	40
	D) Aufgaben	42
	Uebungsaufgaben (51—70)	43
IX.	Von den Vielecken	44
	A) Von den Vielecken im Allgemeinen	44
	B) Von den regelmäßigen Vielecken	45
	C) Aufgaben: Zeichnen regelmäßiger Vielecke	47
X.	Vom Kreise	50
	A) Von der Sehne	51
	B) Von der Tangente	53
	C) Vom Peripherie= und vom Centriwinkel	54
	D) Aufgaben	56
	Uebungsaufgaben (71—80)	57
XI.	Zeichnung verschiedener Bogenlinien	57
XII.	Ein= und Umschreibungen	61
	A) Kreise in und um Vielecke	61
	B) Vielecke in und um Kreise	62
	C) Kreise in und um Kreise	65
	D) Regelmäßige Vielecke in und um regelmäßige Vielecke	66
	Uebungsaufgaben (81—94)	68

		Seite
XIII.	Von der Gleichheit der Figuren	68
	A) Von der Gleichheit der Figuren im Allgemeinen	68
	B) Von der Verwandlung der Figuren	75
	Uebungsaufgaben (95—114)	77
XIV.	Von den Verhältnissen der Linien und Figuren	78
	A) Von den Verhältnissen der Linien	78
	B) Von der Aehnlichkeit der Figuren	80
	C) Von den Verhältnissen der Figuren	84
	D) Aufgaben	86
	Uebungsaufgaben (115—137)	88
XV.	Aufgaben über die Theilung der Figuren	89
	Uebungsaufgaben (138—146)	97
XVI.	Vom Messen der Linien und Ausmessen der Figuren	97
	A) Vom Messen der Linien	97
	Uebungsaufgaben (147—226)	102
	B) Vom Ausmessen geradliniger Figuren	104
	Uebungsaufgaben (227—313)	108
	C) Vom Ausmessen des Kreises	111
	Uebungsaufgaben (314—340)	117
XVII.	Einiges von der Feldmeßkunst	117
XVIII.	Einiges über die Berechnung der Körper	128
	Uebungsaufgaben (341—353)	130
	A) Von den regelmäßigen Körpern überhaupt	130
	B) Vom Prisma	131
	Uebungsaufgaben (354—373)	135
	C) Vom Cylinder	136
	Uebungsaufgaben (374—384)	137
	D) Von der Pyramide	137
	Uebungsaufgaben (385—393)	142
	E) Vom Kegel	143
	Uebungsaufgaben (394—403)	145
	F) Von der Kugel	145
	Uebungsaufgaben (404—412)	148
	G) Berechnung der regelmäßigen Körper	148
	H) Berechnung des Rauminhaltes mancher Körper aus dem absoluten und specifischen Gewichte derselben	150
	Uebungsaufgaben (413—420)	152
Anhang.	A) Die Netze einiger geometrischer Körper	153
	B) Construction noch einiger krummer Linien	155

Zeichen und Abkürzungen.

$+$ Zeichen der Addition; z. B. $a + b$; (man spricht: a und b);
$\times$ Zeichen der Multiplication; z. B. $a \times b$; (man spricht: a mal b);
$-$ Zeichen der Subtraction; z. B. $a - b$; (man spricht: a weniger b);
: Zeichen der Division; z. B. $a : b$; auch wird die Division in der Form eines Bruches ausgedrückt; z. B. $\frac{a}{b}$; (man spricht in beiden Fällen: a dividirt durch b). In Proportionen bedeutet das Zeichen : soviel, als: verhält sich; z. B. $a : b = c : d$; (man spricht: a verhält sich zu b, wie c sich verhält zu d);
$=$ Zeichen der Gleichheit, d. h. der Uebereinstimmung hinsichtlich der Größe; z. B. $a = b$; (man spricht: a gleich b);
$\sim$ Zeichen der Aehnlichkeit, d. h. der Uebereinstimmung hinsichtlich der Form; z. B. $a \sim b$; (man spricht: a ist ähnlich b);
$\cong$ Zeichen der Congruenz, d. h. der Uebereinstimmung hinsichtlich der Größe und Form zugleich; z. B. $a \cong b$; (man spricht: a ist congruent b);
$>$ Zeichen des Größersein's; z. B. $a > b$; (man spricht: a ist größer als b);
$<$ Zeichen des Kleinersein's; z. B. $b < a$; (man spricht: b ist kleiner als a);
$\llcorner$ Zeichen eines Winkels;
$\llcorner\!\llcorner$ Zeichen mehrerer Winkel;
R Zeichen eines rechten Winkels;
R R Zeichen mehrerer rechter Winkel;
$\triangle$ Zeichen des Dreieck's:
$\triangle\!\triangle$ Zeichen mehrerer Dreiecke;
$\|$ Zeichen des Parallelismus oder des Gleichlauf's der Linien; z. B. $a \| b$; (man spricht: a parallel b);
Zeichen eines Parallelogrammes überhaupt;
Zeichen mehrerer Parallelogramme;
n bedeutet eine beliebige Anzahl; n Seiten können also 3 oder 4 oder 10 ꝛc. Seiten sein;

° Zeichen eines Grades oder einer Ruthe;
′ Zeichen einer Minute oder eines Schuh;
″ Zeichen einer Secunde oder eines Zoll;
‴ Zeichen einer Terzie oder einer Linie.

Z. B. 46° 5′ 4″ 6‴ heißt entweder 46 Grade, 5 Minuten, 4 Secunden, 6 Terzien oder 46 Ruthen, 5 Schuh, 4 Zoll, 6 Linien.

Der Sinn eines Satzes muß entscheiden, ob das Zeitmaß oder Längenmaß gemeint sei.

a^2 oder a^3 oder a^4 Zeichen der zweiten, dritten oder vierten Potenz und ist eine Abkürzung für $a \times a$ oder $a \times a \times a$ oder $a \times a \times a \times a$; oder, da bei Buchstaben das Multiplicationszeichen gewöhnlich weggelassen wird, für aa oder aaa oder aaaa.

$\sqrt{}$ Zeichen der Wurzel einer Potenz oder der Factor, welcher, mehrere Male wiederholt, die Potenz gibt. So ist $\sqrt{a^2}$ = der Quadratwurzel oder der Wurzel der zweiten Potenz oder des zweiten Grades; $\sqrt[3]{a^3}$ = der Kubikwurzel oder der Wurzel des dritten Grades u. s. w.

Vor. bedeutet: Voraussetzung, d. h. nach der willkürlichen Annahme.

Verf. oder Constr. bedeutet: Verfertigung oder Construction, d. h. die Wahrheit irgend einer Behauptung ergibt sich aus der Verfertigung der Figur oder Zeichnung.

Bed. bedeutet: Bedingung.

Beh. bedeutet: Behauptung.

g. L. bedeutet: gerade Linie.

g. Ll. bedeutet: gerade Linien.

k. L. bedeutet: krumme Linie.

Ein Querstrich bei den Beweissätzen bedeutet immer: folglich; d. h. unter dem Querstrich sind ein oder mehrere Sätze, welche eine Folgerung aus den über dem Querstrich stehenden Sätzen enthalten.

I. Einleitung.

1) Größe ist jedes in der Zeit und Ausdehnung Vorhandene, also durch das Zählen oder räumliche Versinnlichen Entstandene.

2) Diejenige Wissenschaft, welche das Entstehen, Bilden, Vergleichen und Beziehen der Größen lehrt, heißt Größenlehre oder Mathematik. Sie handelt von Zeit, Zahl und Raum.

3) Bestehen die Größen aus zusammengenommenen einzelnen Größen, ohne daß man auf deren Verbindung Rücksicht nimmt, so nennt man sie unstetige, discrete oder getrennte Größen.

4) Machen Größen ein bestimmtes Ganze aus, so daß das Ende einer Theilgröße zugleich der Anfang der nächstfolgenden ist, so heißt man sie stetige oder zusammenhängende Größen.

5) Unstetige Größen sind die Zahlen. Die Wissenschaft, welche die Natur und Eigenschaften der Zahlen erklärt und lehrt, wie aus gegebenen Zahlgrößen andere unbekannte Zahlgrößen durch Schlüsse gefunden werden können, nennt man Arithmetik, Zahlenlehre oder Rechenkunst.

6) Stetige Größen sind Linien, Winkel, Flächen und Körper. Die Wissenschaft, welche sich mit den Begriffen, der Darstellung und Vergleichung der stetigen Größen beschäftigt und die Wahrheit der gefundenen Sätze durch sichere und überzeugende Schlüsse beweiset, heißt Geometrie *).

7) Ein Körper ist ein begrenzter Raum; die Fläche ist die Grenze des Körpers und die Linie ist die Grenze der Fläche; und weil diese Größen im Raume vorgestellt werden, so heißt man sie räumliche Größen. Deßhalb kann man auch sagen: Geometrie sei die Lehre von den räumlichen Größen. (s. §. 2 u. 3.)

Anmerk. 1. Man trägt die Lehre von den räumlichen Größen gewöhnlich in gesonderten Sätzen vor, die nach ihrem Inhalte benannt werden. Sie sind folgende:

*) Geometrie, ein griechisches Wort, heißt eigentlich Erdmeßkunst.

a) Eine Erklärung oder Definition ist ein Satz, welcher die wesentlichen Merkmale eines Begriffes aufstellt.

b) Eine Behauptung ist ein Satz, welcher von irgend einer Sache etwas aussagt.

c) Eine Voraussetzung, Bedingung oder Hypothese ist eine Behauptung, die ohne Beweis als wahr angenommen wird.

d) Ein Grundsatz oder Axiom ist ein Satz, der eine so einfache und einleuchtende Wahrheit enthält, daß sie eines Beweises nicht bedarf, und auf welchen sich wieder andere Sätze stützen.

e) Ein Lehrsatz ist ein Satz, der eine Behauptung enthält, welche eines nähern Beweises bedarf.

f) Ein Beweis ist die Ableitung einer in einer Behauptung enthaltenen Wahrheit aus bereits bekannten andern Wahrheiten oder wenigstens aus Sätzen, deren Wahrheit angenommen worden ist.

g) Eine Aufgabe ist ein Satz, der die Ausführung einer Handlung verlangt, oder fordert, daß Etwas geschehen solle.

h) Eine Auflösung oder Construction ist die Ausführung Dessen, was in einer Aufgabe verlangt worden ist, oder auch die Bezeichnung der Mittel, durch welche das geschieht, was nach einer Aufgabe ausgeführt werden soll.

i) Ein Zusatz ist ein Satz, welcher aus einem vorhergegangenen bewiesenen Lehrsatz, einer aufgelösten Aufgabe rc. eine neue Wahrheit folgert, oder die in den vorhergegangenen Sätzen enthaltene Wahrheit nach verschiedenen Beziehungen erweitert oder anwendet.

Anmerk. 2. Der Unterricht in der Geometrie setzt den in der Zahlenlehre wenigstens theilweise voraus; da aber die räumlichen Größen sowohl, als die Zahlen nur besondere Arten von Größen sind, so gelten für sie auch alle die allgemeinen mathematischen Sätze, welche für die Größen überhaupt gelten. Dergleichen Sätze (Grundsätze), welche in der Folge in diesem Buche vorzüglich angewendet werden, sind folgende:

I. Jede Größe ist sich selbst gleich; z. B. $a = a$.

II. Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich; z. B.

$$\begin{array}{c} a = b \\ \underline{c = b} \\ a = c \end{array}$$

III. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich; z. B. besteht a aus den Theilen $b + c + d$, so ist $a = b + c + d$

Zusatz. Daraus folgt, daß das Ganze größer ist, als jeder Theil desselben. Ist z. B $a = b + c + d$, so ist $a > b$; $a > c$ u. s. w.

IV. Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches; z. B.

$$\frac{\begin{array}{c} a=b \\ c=c \end{array}}{a+c=b+c} \qquad \frac{\begin{array}{c} a=b \\ c=d \end{array}}{a+c=b+d}$$

Zusatz. Daraus folgt, daß das Gleichvielfache zweier gleicher Größen ebenfalls gleich ist.

$$\frac{a=b}{\begin{array}{c} 3a=3b \\ 6a=6b \end{array}} \qquad \frac{c=d}{\begin{array}{c} c+c=d+d \\ c+c+c=d+d+d \\ 8c=8d \end{array}}$$

V. Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt Gleiches.

$$\frac{\begin{array}{c} a=b \\ c=c \end{array}}{a-c=b-c} \qquad \frac{\begin{array}{c} a=b \\ c=d \end{array}}{a-c=b-d}$$

VI. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gibt Gleiches.

$$\frac{\begin{array}{c} a=b \\ c=c \end{array}}{a\times c=b\times c} \qquad \frac{a=b\times c}{a\times d=(b\times c)\times d} \qquad \frac{a=b}{\begin{array}{c} a\times a=b\times b \\ \text{oder } a^2=b^2 \end{array}}$$

VII. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches.

$$\frac{a=b}{a:c=b:c} \qquad \frac{a=b}{\frac{a}{c}=\frac{b}{c}}$$

Zusatz. Die vier letzten Grundsätze lassen sich allgemeiner so ausdrücken: Gleiches auf gleiche Art verändert, gibt Gleiches.

II. Körper, Fläche, Linie, Punct, Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz im Allgemeinen.

§. 1. Erklärungen.

a) Die räumlichen Größen unterscheiden sich durch die Anzahl ihrer Ausdehnungen von einander.

b) Da ein Körper ein überall völlig begrenzter Raum ist (Einl. 7), so ist er eine Größe, welche nach drei Richtungen, nach Länge, Breite und Dicke (Höhe) ausgedehnt ist. Ein Körper hat also drei Ausdehnungen oder Dimensionen.

c) Ist der völlig begrenzte Raum tastbar, d. h. mit einem Stoffe ausgefüllt, so nennt man ihn physischen Körper; ist der begrenzte Raum nicht mit einem Stoffe ausgefüllt oder denkt man sich den Stoff

hinweg, so bleiben immer noch die drei Dimensionen, und man nennt einen solchen begrenzten oder begrenzt gedachten Raum einen geometrischen Körper.

d) Ein physischer Körper ist jedesmal zugleich ein geometrischer; aber nicht immer ist ein geometrischer Körper zugleich ein physischer. — Betrachte einen aus Holz oder einem andern Stoffe gefertigten Würfel. Er hat eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke und ist also ein Körper, und weil er aus einem Stoffe oder einer Materie besteht und daher tastbar ist, ein physischer Körper. Denkst Du aber den Raum, welchen der Würfel umschließt, ohne Stoff, d. h. blos die drei Dimensionen, so ist dies kein physischer Körper mehr, wohl aber ein geometrischer. Ebenso ist ein von allen Gegenständen und von Luft leeres Zimmer immer noch ein geometrischer, aber kein physischer Körper.

e) Jeder Körper ist begrenzt. Die Grenze eines Körpers ist aber nicht ein Theil desselben; denn jeder Theil eines Körpers ist wieder ein Körper. Die Grenze ist blos das Aufhören des Körpers.

§. 2. Erklärung.

Die Grenze des Körpers heißt geometrische Fläche. Da sie nicht ein Theil des Körpers sein kann, so ist sie eine Größe mit nur zwei Dimensionen, nämlich mit Länge und Breite.

Betrachte den so eben erwähnten Würfel; er ist von 6 geometrischen Flächen begrenzt; jede hat eine Ausdehnung nach Länge und Breite. Hätte eine solche Fläche eine Dicke, wenn sie auch noch so gering wäre, so würde sie keine Fläche mehr, sondern ein Körper sein.

§. 3. Erklärung.

Da, wo die Fläche aufhört, ist die Grenze derselben. Die Grenze der Fläche heißt geometrische Linie. Da die Linie nicht ein Theil der Fläche sein kann, weil sie sonst selbst eine Fläche wäre, so hat sie blos eine Dimension nämlich Länge.

An dem Würfel ist jede Seite durch 4 Linien begrenzt, und weil 6 Seiten vorhanden sind, so solltest Du $6 \times 4 = 24$ Linien zählen; da aber je zwei Flächen eine Linie als gemeinschaftliche Grenze haben, so sind es nur $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$ Linien.

§. 4. Erklärung.

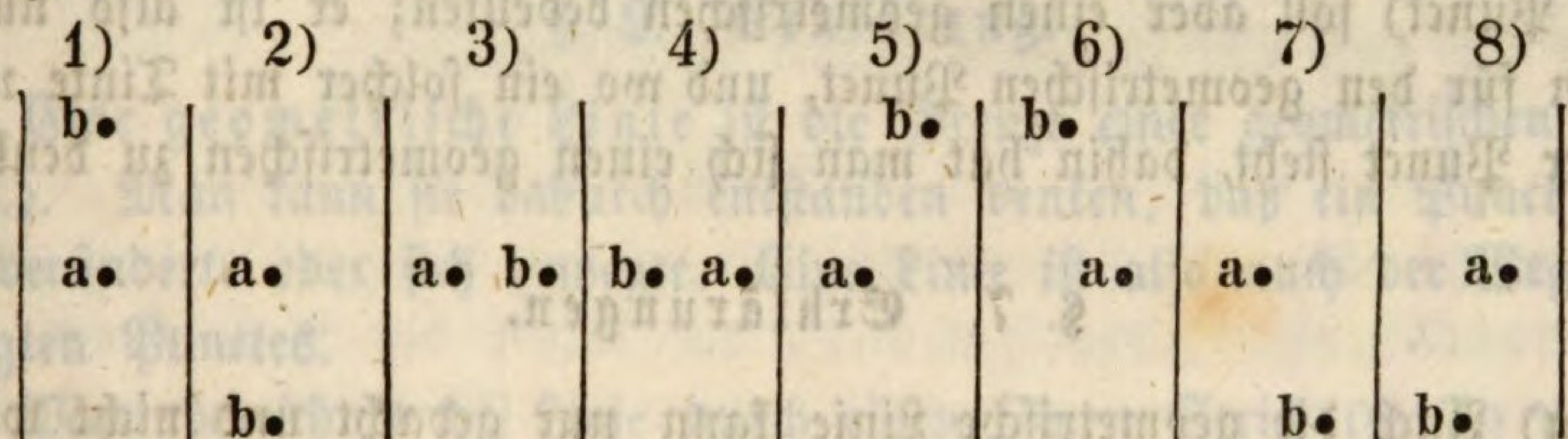
Die Grenze der Linie heißt geometrischer Punct. Da er nicht ein Theil der Linie ist, so kann er auch keine Ausdehnung haben, weil die Linie selbst nur eine Ausdehnung hat.

Weil jede der 12 Linien an den Würfelflächen durch zwei Puncte begrenzt ist, so sollten am Würfel $12 \times 2 = 24$ Puncte zu zählen sein; weil aber je drei Linien einen Punct als gemeinschaftliche Grenze haben, so sind es nur $\frac{24}{3} = 8$ Puncte.

§. 5. Erklärungen.

a) Ein Punct ist von einem andern nur durch seine Stelle oder Lage verschieden. Die Lage eines Punctes kann daher auch nur im Vergleich zu einem andern bestimmt werden.

b) Vergleicht man 2 Puncte miteinander, so sind folgende Lagen möglich.



Im Vergleich zu dem Puncte a steht der Punct b:

1) oberhalb des Punctes a. Steht b genauer über a, so daß b sich weder rechts noch links neigt, so sagt man: b stehe senkrecht (vertikal, lothrecht, perpendikulär) über a; —

2) unterhalb des Punctes a. Neigt sich b weder rechts, noch links, so steht b unter a senkrecht. In diesen beiden Fällen stehen also die Puncte senkrecht, oder die Lage der Puncte ist eine senkrechte; —

3) rechts vom Puncte a. Steht der Punct b weder höher, noch niedriger als a, so sagt man: er stehe wagrecht (wasserrecht, wassergleich, horizontal) zu a; —

4) links vom Puncte a. Steht der Punct b auch hier nicht höher und niedriger, als a, so steht er ebenfalls wagrecht. In den beiden Fällen Nr. 3 und 4 stehen also die Puncte wagrecht zu einander, oder ihre Lage ist eine wagrechte.

5—8) rechts und links oberhalb — rechts und links unterhalb des Punctes a. In diesen vier Fällen ist die Lage der Puncte eine schiefe, und zwar bei Nr. 5 rechts aufwärts oder rechts steigend; bei Nr. 6 links aufwärts oder links steigend; bei Nr. 7 rechts abwärts oder rechts fallend; bei Nr. 8 links abwärts oder links fallend.

c) Zwei Puncte können also eine senkrechte, wagrechte und eine schiefe Lage oder gegenseitige Stellung haben. Die letztere jedoch kann wieder verschieden sein.

d) Drei und mehr Puncte können wieder dieselben Lagen oder aus diesen mehrfach zusammengesetzte Lagen haben.

§. 6. Erklärung.

Körper, Flächen und Linien sind etwas in der Ausdehnung Vorhandenes und somit Größen. Der Punct, welcher gar keine Ausdehnung hat, ist demnach keine Größe; er kann nur gedacht werden und bezeichnet blos eine Stelle im Raume.

Wenn Du mit Kreide oder Tinte einen sogenannten Punct auf ein Brett oder Papier machst, so ist dies kein geometrischer Punct, sondern ein Körper, weil er drei Dimensionen hat. Der gezeichnete Punct (= physischer Punct) soll aber einen geometrischen bedeuten; er ist also nur ein Zeichen für den geometrischen Punct, und wo ein solcher mit Tinte rc. gemachter Punct steht, dahin hat man sich einen geometrischen zu denken.

§. 7. Erklärungen.

a) Auch die geometrische Linie kann nur gedacht und nicht wirklich gezeichnet werden. Wenn Du einen Strich mit Kreide oder Tinte machst (= physische Linie), so ist dies ein Körper, weil zu der Ausdehnung Länge noch Breite und Dicke kommen. Du mußt Dir aber an die Stelle, wo Du einen Strich machst, eine geometrische Linie gezogen denken.

b) Einen Strich kannst Du auch dadurch machen, daß Du physische Puncte aneinander reihest; eine geometrische Linie läßt sich aber nicht durch Aneinanderreihung geometrischer Puncte bilden, obgleich Du in jeder geometrischen Linie überall einen Punct, d. h. eine Grenze, oder ihren Anfang oder ihr Ende denken kannst.

c) Jede begrenzte Linie hat einen Anfangs- oder einen Endpunct, oder wie man auch zu sagen pflegt: sie hat zwei Endpuncte.

d) Wenn zwei Linien sich durchschneiden, so entsteht an der Durchschnittsstelle ein geometrischer Punct, welchen man **Durchschnittspunct** nennt.

e) Die geometrische Fläche kann auch nur gedacht und nicht durch Zeichnung dargestellt werden; doch werden gewöhnlich durch gezogene Striche die Grenzen einer Fläche bezeichnet.

f) Wenn zwei Flächen sich durchschneiden, so entsteht an der Durchschnittsstelle eine geometrische Linie.

g) Ein geometrischer Körper kann durch Flächen, eine Fläche durch Linien und eine Linie durch Puncte getheilt gedacht werden; die Flächen, Linien und Puncte bezeichnen eigentlich nur die Stelle, wo die Theilung vorgenommen werden soll oder vorgenommen worden ist.

§. 8. Erklärungen.

Ein Ding ist einem andern gleich, wenn es dieselbe Größe besitzt; es ist einem andern ähnlich, wenn es dieselbe Gestalt oder Form hat; es ist einem andern congruent, wenn es dieselbe Größe und dieselbe Gestalt hat.

Gleichheit ist also Uebereinstimmung in der Größe (=).

Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung in der Gestalt (∾).

Congruenz ist die Uebereinstimmung in der Größe und Gestalt (≌).

III. Von Linien und Flächen in's Besondere.

§. 9. Erklärung.

Eine geometrische Linie ist die Grenze einer geometrischen Fläche (§. 3.). Man kann sie dadurch entstanden denken, daß ein Punct seinen Ort veränderte oder sich bewegte. Eine Linie ist also auch der Weg eines bewegten Punctes.

Man bezeichnet die Linie durch einen feinen Strich (§. 7.) und benennt sie entweder mit einem Buchstaben, den man zwischen die Endpunkte des Striches setzt, oder gewöhnlich mit zwei Buchstaben, die an den beiden Endpuncten stehen.

§. 10. Erklärungen.

a) Eine Linie heißt gerade, wenn alle ihre Theile einerlei Richtung haben (Fig. 1.) Sie kann dadurch entstanden gedacht werden, daß ein Punct sich in derselben Richtung fortbewegte. (Diese Erklärung ist jedoch mangelhaft; denn man kann eigentlich nicht sagen, was eine gerade Linie sei; es ist aber auch nicht nöthig, weil der Begriff einer g. L. ein einfacher ist.)

b) Eine Linie heißt krumm, wenn alle ihre Theile verschiedene Richtungen haben, so daß auch nicht der kleinste Theil derselben gerade ist (Fig. 2). Sie kann durch die Bewegung eines Punctes, der in jedem Augenblick seine Richtung verändert, entstehen.

c) Eine Linie heißt eine gebrochen gerade Linie, wenn sie aus verschiedenen geraden Linien zusammengesetzt ist (Fig. 3).

d) Eine Linie heißt eine gebrochen krumme Linie, wenn sie aus verschiedenen krummen Linien besteht (Fig. 4).

e) Eine Linie heißt eine gemischte, wenn sie aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist (Fig. 5).

Anmerk. Statt des Ausdrucks: „gerade Linie" wird in der Folge auch nur „Gerade" stehen. Auch wenn blos L. (=Linie) steht, so ist immer eine gerade Linie gemeint.

§. 11. Grundsätze.

1) Die Lage und Größe einer geraden Linie sind durch 2 Puncte genau bestimmt, oder, was dasselbe ist: zwischen 2 Puncten ist nur 1 g. L. möglich; durch 2 Puncte können jedoch unzählig viele krumme Linien gezogen werden.

2) Eine gerade Linie ist die Entfernung zweier Puncte oder der kürzeste Weg des einen Punctes zum andern. Zwei g. L. sind also gleich oder decken sich, wenn beim Aufeinanderlegen derselben ihre Endpuncte auf einander fallen.

Zus. 1. Durch einen Punkt kann man unendlich viele Linien ziehen; dieser Punct heißt dann der Durchschnittspunct der Linien (§. 7 d).

Zus. 2. Zwei g. Ll. können nur einen Punct gemeinschaftlich haben, folglich sich auch nur in einem Punct durchschneiden.

§. 12. Aufgabe.

Ein Lineal zu prüfen, ob die an demselben gezogene Linie gerade ist.

Auflösung. Ziehe genau an der Kante des Lineals eine feine Linie (Strich); wende nun das Lineal so, daß die Kante an der andern Seite der Linie liegt; rücke die Kante genau an die Linie und ziehe wieder scharf an der Kante eine Linie. Fallen diese Linien in allen ihren Theilen aufeinander, d. h. decken sie sich, so ist die Linie eine gerade (§. 10 a), und das Lineal ist richtig.

§. 13. Erklärungen.

a) Eine gerade Linie heißt senkrecht, wenn ihre Endpuncte senkrecht stehen (§. 5), oder wenn sie sich weder zur rechten noch zur linken Seite neigt (Fig. 6). Eine senkrechte Linie heißt auch: Normallinie, oder die Normale.

b) Eine gerade Linie heißt wagrecht, wenn ihre Endpunkte wagrecht stehen (§. 5), oder wenn sie sich weder auf- noch abwärts neigt (Fig. 1.)

c) Eine gerade Linie heißt schief, wenn sie weder senkrecht noch wagrecht ist, also entweder rechts steigend (Fig. 7 a b), links steigend (Fig. 7 d c), rechts fallend (Fig. 7 c d), oder links fallend (Fig. 7 b a).

Zusatz. Eine links fallende und eine rechts steigende g. L. ist hier dieselbe Linie, weil es hier blos darauf ankommt, von welchem Puncte aus man die Linie gezogen denkt.

§. 14. Erklärungen.

a) Unter den krummen Linien ist eine besonders wichtig, nämlich die Kreislinie. Sie entsteht, wenn ein Punct um einen andern feststehenden

Punct in gleich weiter Entfernung in einer Ebene (s. §. 17) herumbewegt wird, oder wenn eine begrenzte gerade Linie an einem ihrer Endpuncte festgehalten und mit dem andern Endpuncte in einer Ebene herumbewegt wird, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückkehrt. Der Weg des bewegten Punctes ist eine Kreislinie, Peripherie oder Zirkellinie. Die durch eine Kreislinie begränzte Fläche heißt Kreisfläche oder Kreis (Fig. 8).

b) Jede Kreislinie wird in 360 gleiche Theile eingetheilt, welche Grade (°) heißen; jeder Grad wird wieder in 60 Minuten ('), jede Minute in 60 Secunden ('') und jede Secunde in 60 Terzien (''') eingetheilt.

c) Der Punct, von welchem alle Puncte der Peripherie gleich weit entfernt sind, heißt Centrum oder Mittelpunct (Fig. 8 a).

d) Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben, heißen concentrische Kreise (Fig. 9).

e) Kreise, welche in einander liegen und keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben, heißen excentrische Kreise (Fig. 10).

f) Kreise, deren Peripherieen nur 1 Punct gemein haben und entweder ganz außerhalb einander liegen, oder von denen der eine innerhalb des andern liegt, heißen Berührungskreise (Fig. 11).

g) Jede gerade Linie, deren Endpuncte im Mittelpunct und in der Peripherie liegen, heißt Radius, Halbmesser oder Strahl (Fig. 12 a b).

h) Jede gerade Linie, deren Endpuncte in der Peripherie liegen, heißt Chorde oder Sehne (Fig. 12 c d).

i) Die größte Sehne, nämlich die, welche durch den Mittelpunct geht, heißt Diāmēter oder Durchmesser (Fig. 12 e f).

k) Jeder Theil der Kreislinie heißt Bogen oder Kreisbogen (Fig. 12 e c). Die dem Centrum zugekehrte Seite eines Bogen heißt die hohle Seite und die entgegengesetzte die erhabene Seite.

Anmerk. Jede Sehne theilt die Kreislinie in zwei Bogen und wenn die Sehne kleiner ist als der Durchmesser, so sind die Bogen ungleich; der eine ist größer, der andere kleiner. Wenn in der Folge von einer Sehne und den dazu gehörigen Bogen die Rede ist, so ist immer der kleinere Bogen gemeint.

Zus. 1. Alle Halbmesser desselben Kreises sind gleich, weil ihre Endpuncte gleiche Entfernung von einander haben und zwischen zwei Puncten nur 1 g. L. möglich ist (§. 11. 1).

Zus. 2. Alle Durchmesser desselben Kreises sind einander gleich, weil jeder aus zwei unter sich gleichen Halbmessern besteht.

Zus. 3. Alle Kreislinien, welche mit denselben Halbmessern beschrieben sind, decken sich, d. h. beim Aufeinanderlegen fallen alle Puncte der einen Kreislinie auf die andere Kreislinie.

Zus. 4. Zwei Bogen, die mit denselben Halbmessern beschrieben sind, sind gleich, wenn sie sich decken, oder wenn ihre Endpuncte und die Mittelpuncte beim Aufeinanderlegen zusammenfallen.

Zus. 5. Da der Durchmesser durch den Mittelpunct geht, so sind die Bogen, in die er die Kreislinie theilt, einander gleich. Diese Bogen heißen Halbkreise.

Anmerk. Allgemein bekannt ist, daß man sich zur Darstellung der Kreislinien des Zirkels bedient. In den gewöhnlichen zweischenkeligen Zirkel kann häufig statt der untern Hälfte des einen Schenkels (Zirkelfußes) eine Reißfeder eingeschraubt werden. Der Doppelzirkel besteht aus 2 Zirkeln, deren Schenkel einander gegenüber stehen, und von denen die zwei kürzeren gewöhnlich die Hälfte von der Oeffnung oder der Entfernung der größeren angeben.

§. 15. Aufgabe.

Eine gerade Linie zu verlängern.

1. Aufl. Das Verlängern einer g. L. mittelst eines Lineals ist leicht auszuführen; will man jedoch mit größter Genauigkeit die Verlängerung vornehmen, so verfahre man also: Setze (Fig. 13) den Zirkel in a und ziehe mit beliebiger Oeffnung den Bogen b c (§. 14 k), der die gegebene Linie in d schneidet; mache d b = d c und ziehe von b und c aus mit beliebiger, aber gleicher Oeffnung des Zirkels Bögen (Kreuzbögen), die sich in e durchschneiden und ziehe endlich d e.

2. Aufl. Soll (Fig. 14) a b nach c verlängert werden, so ziehe von a den Bogen d e und von b den Bogen f g, der den ersten Bogen in h und i durchschneidet; mache h m = i n und ziehe die Linien h m p und i n q. Der Durchschnittspunct o liegt nun in der g. L. a b; ziehe nun durch o die g. L. b c.

§. 16. Erklärungen.

a) Eine Fläche ist die Grenze eines Körpers (§. 2). Die größte Ausdehnung einer Fläche heißt Länge (unter Umständen auch Höhe) und die der Länge entgegengesetzte, geringere Ausdehnung Breite.

b) In eine Fläche kann man unendlich viele Linien und durch eine Linie unendlich viele Flächen legen.

§. 17. Erklärungen.

a) Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene, wenn alle Theile in derselben Richtung neben einander liegen und man also nach allen Seiten hin g. Ll. in sie hinein gelegt denken kann, welche ganz mit ihr zusammenfallen.

b) Eine Fläche heißt **krumm**, wenn ihre Theile nicht in derselben Richtung liegen und also gerade Linien nicht so gezogen werden können, daß sie ganz mit ihr zusammenfallen.

IV. Von den Winkeln.

§. 18. Erklärung.

a) Wenn zwei gerade Linien in einen Punct zusammentreffen, so bilden sie einen **Winkel** (∟). Ein Winkel ist also die Größe der Neigung zweier g. L. in einem Punct oder der Unterschied in der Richtung zweier g. L., die von **einem** Puncte ausgehen. Oder denkt man sich eine unbegrenzte Ebene und 2 g. L., die von einem Punct der Ebene unbegrenzt fortlaufen, so schneiden diese Linien ein Stück von der Ebene aus; ein Winkel ist demnach auch eine ebene Fläche, welche nach einer Seite in's Unendliche fortläuft und nach zwei Seiten von zwei Linien begrenzt wird.

b) Die beiden Linien heißen **Schenkel**, und der Punct, in welchem sie sich treffen, heißt **Scheitel** oder **Winkelpunct**.

Zusatz. Durch die Verlängerung oder Verkürzung der Schenkel eines Winkels wird dieser selbst nicht größer oder kleiner, sondern nur durch die geringere oder größere Neigung der Schenkel (∟ **b a c** Fig. 15, > ∟ **b a c** Fig. 16, und > als ∟ **b a c** Fig. 18).

c) Man bezeichnet die Winkel (∟) so, daß entweder 1 Buchstabe zwischen die Schenkel nahe an den Scheitel gesetzt wird (Fig. 17 ∟ **a**), oder durch 3 Buchstaben so, daß der am Scheitel sich befindliche immer in die Mitte zwischen die beiden andern zu stehen kommt (Fig. 18 ∟ **b a c**).

d) Zwei Winkel sind **gleich**, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitel und Schenkel zusammenfallen. Gleiche Winkel decken also einander. — Ein Winkel ist größer, als ein anderer, wenn beim Aufeinanderlegen blos die Scheitel uud ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber außerhalb des zweiten Schenkels des andern Winkels fällt. — Ein Winkel ist kleiner, als ein anderer, wenn wohl Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber zwischen den Schenkeln des zweiten Winkels liegt.

§. 19. Erklärungen.

a) Wenn eine gerade Linie eine andere senkrecht trifft, oder wenn eine gerade Linie auf einer andern senkrecht steht, so entsteht ein **rechter Winkel** (= R) (**Fig. 19**).

b) Also steht eine gerade Linie auf einer andern senkrecht, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt: zwei Linien stehen auf einander senkrecht, wenn sie **R R** bilden, oder wenn die eine ein Loth auf der andern ist.

c) Alle **R R** sind einander gleich, weil bei einem **R** die Neigung der Schenkel immer dieselbe ist.

d) Wenn eine Gerade eine andere Gerade schief trifft, so entsteht ein schiefer Winkel.

e) Also steht eine Linie schief auf einer andern, wenn sie miteinander schiefe Winkel bilden.

f) Ist der schiefe Winkel $>$ **R**, so heißt er stumpf (Fig. 20); ist er aber $<$ **R**, so heißt er spitzig (Fig. 18).

g) Denke ich (Fig. 21) von dem **R c a b** den Schenkel **a b** nach der rechten Seite hinbewegt, so wächst die Größe des Winkels, und steht der bewegte Schenkel endlich in der Richtung **a d**, so bildet er mit dem andern Schenkel **c a** eine g. L., und der nun entstandene ∟ **c a d** (dessen Schenkel eine g. L. bilden und dessen Scheitel in **a** ist) heißt flacher, gerader oder gestreckter ∟. Da **b a** senkrecht auf **c d** steht und dadurch sowohl links als rechts **R R** entstehen, so ist der flache ∟ $= 2$ **R**. Demnach sind auch alle flachen Winkel einander gleich und der **R** ist die Hälfte eines flachen Winkels.

h) Denke ich den Schenkel **a b** noch weiter fortbewegt, so daß er etwa in die Richtung **a e** kommt, so heißt der nun entstandene ∟ **c a e** erhabener ∟; er ist > 2 **R**, kann aber auch, wenn man den Schenkel **a b** noch weiter fortbewegt denkt, $= 3$ **R** (∟ **c a f**) oder auch > 3 **R** (∟ **c a g**) sein.

i) Winkel, welche < 2 **R** sind, nennt man auch hohle ∟∟. Jeder hohle ∟ hat einen erhabenen ∟ gegenüber, und umgekehrt. In Fig. 22 ist **a** der hohle und **b** der erhabene ∟.

k) Es gibt folgende

Winkel:

hohle ∟∟ (< 2 **R**)	flache ∟∟ ($= 2$ **R**)	erhabene ∟∟ (> 2 **R**)

hohle ∟∟:

stumpfe ∟∟ ($>$ **R**)	rechte ∟∟ ($=$ **R**)	spitzige ∟∟ ($<$ **R**)

Zus. 1. Auch durch zwei Bogenlinien, die in einem Punct sich treffen, kann ein ∟ gebildet werden. Dieser ∟ heißt dann krummlinig, während der aus g. Ll. entstehende geradlinig genannt wird.

Zus. 2. 2 hohle Bogenlinien bilden einen krummlinnig-hohlen ∟ (Fig. 23);

2 erhabene Bogenlinien bilden einen krummlinig-erhabenen ∟ (Fig. 24);

1 hohle und 1 erhabene Bogenlinie bilden einen gemischt-krummlinigen ∟ (Fig. 25);

1 hohle und 1 g. L. bilden einen gemischtlinig-hohlen ∟ (Fig. 26);

1 hohle und 1 g. L. bilden einen gemischtlinig-erhabenen ∟ (Fig. 27).

Anmerk. In der Folge wird unter dem Ausdruck: **Winkel** (∟) immer nur der **geradlinig-hohle** ∟ verstanden.

§. 20. Erklärung.

Wenn 2 Winkel einen Schenkel gemein haben und die beiden andern Schenkel in einer g. L. liegen, so heißen sie **Nebenwinkel** (Fig. 28). Sie entstehen, wenn eine g. L. mit einer andern in einen Punct, der nicht Endpunct ist, zusammentrifft.

Zus. 1. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen einen flachen Winkel, oder: die Summe zweier Nebenwinkel ist = 2 **R**.

Zus. 2. Zu einem gegebenen Nebenwinkel zeichnet man den dazu gehörigen Nebenwinkel, wenn man den einen Schenkel über den Scheitel hinaus verlängert, so daß die Verlängerung mit dem Schenkel eine g. L. bildet.

Zus. 3. Sind die beiden Nebenwinkel ungleich, so ist jeder ein schiefer Winkel, der größere ein stumpfer und der kleinere ein spitziger Winkel. Ein spitziger hat also einen stumpfen und ein stumpfer einen spitzigen Winkel zum Nebenwinkel.

Zus. 4. Sind die beiden Nebenwinkel gleich, so ist jeder ein **R**; ist also ein Nebenwinkel = **R**, so ist auch der andere = **R**.

Zus. 5. Bei gleichen Nebenwinkeln steht der gemeinschaftliche Schenkel senkrecht auf der g. L., welche die beiden andern Schenkel bilden. Die Linie **e b** (Fig. 29) ist also eine senkrechte Linie oder ein Perpendikel.

Zus. 6. Wenn 2 Winkel einen Schenkel gemein haben und zusammen = 2 **R** sind, so bilden sie einen flachen Winkel (§. 19. g) und die beiden andern Schenkel liegen in einer g. L.

Zus. 7. Denkt man sich 2 Nebenwinkel durch eine beliebige Anzahl von g. Ll., die sich in dem Scheitelpunct vereinigen (Fig. 30), in kleinere ∟∟ getheilt, so ist die Gesammtgröße aller dieser ∟∟ = 2 **R**; oder alle ∟∟, die auf einer Seite einer g. L. aus einem gemeinschaftlichen Schenkel möglich sind, sind = 2 **R**.

Zus. 8. Da nun auf der andern Seite der g. L. alle ∟∟ aus demselben gemeinschaftlichen Scheitel auch = 2 **R** sind, so sind somit alle Winkel, die um einen Punct in einer Ebene möglich sind, = 4 **R**.

§. 21. Erklärung.

Wenn 2 Winkel einen Scheitel gemein haben, und die Schenkel des einen ∟ die verlängerten Schenkel des andern sind, so heißen sie Scheitel- oder Verticalwinkel; a und d, ferner c und b (Fig. 31) sind Scheitelwinkel. Sie entstehen, wenn 2 g. Ll. sich durchschneiden; der Durchschnittspunct ist der gemeinschaftliche Scheitel.

§. 22. Lehrsatz.

Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis: In Fig. 31 sind

⊾ a + c = 2 R
⊾ d + c = 2 R } (§. 20. Zus. 1.)

⊾ a + c = ⊾ d + c (II) *)
∟ c = ∟ c (I)

∟ a = ∟ d (V)

⊾ c + a = 2 R
⊾ b + a = 2 R } (§. 20. Zus. 1.)

⊾ c + a = ⊾ b + a (II)
∟ a = ∟ a (I)

∟ c = ∟ b (V)

§. 23. Erklärungen.

a) Ein Winkel, dessen Scheitel in den Mittelpunct eines Kreises fällt und dessen Schenkel, gehörig verlängert, die Peripherie treffen, heißt Centri- oder Mittelpunctswinkel. (Fig. 100 a g f). Der Bogen, welcher zwischen den Schenkeln eines solchen Winkels liegt, heißt der zum Winkel gehörige Bogen, so wie umgekehrt der Winkel der zum Bogen gehörige Centriwinkel.

b) Ebenso ist der Bogen einer Sehne derjenige Bogen, welcher von der Sehne begrenzt ist.

c) Wenn zwei Durchmesser sich senkrecht durchschneiden (Fig. 32), so theilen sie den Kreis und die Kreislinie, diese mögen groß oder klein sein, in 4 gleiche Theile. Da ferner die am Durchschnittspuncte entstandenen Centriwinkel **RR** sind (§. 19 a), so begrenzen je zwei Schenkel eines **R** den vierten Theil der Kreislinie oder 90^{0} (§. 14 b).

d) Einen Winkel messen heißt, die unbekannte Größe des Winkels (d. h. die Neigung der Schenkel) mit einem Winkel von bestimmter Größe vergleichen. Als Winkelmaß nimmt man nun den **R** an und vergleicht also die Größe jedes andern Winkels mit einem **R** (§. 20 g), oder, was ebensoviel ist, man betrachtet den Scheitel a (Fig. 33) des zu messenden Winkels als das Centrum eines Kreises und mißt die Größe des Bogens d e oder b c, den seine Schenkel begrenzen. Je größer der Winkel, desto größer ist der Bogen und umgekehrt, und es ist ganz gleich, ob der Halb-

*) Die römischen Ziffern beziehen sich auf die in der Einleitung, Anmerk. 2, angegebenen Grundsätze.

messer klein sei (a e) oder groß (a c); denn der Bogen, welcher durch die Schenkel begrenzt wird, ist immer der gleichgroße Theil des Kreises, von welchem der Bogen selbst ein Theil ist.

Zus. 1. Ein R ist also $= 90^0$; ein stumpfer Winkel ist $> 90^0$; ein spitziger Winkel ist $< 90^0$; ein flacher Winkel $= 2 \times 90 = 180^0$; ein erhabener Winkel ist $> 2 \times 90^0$; also $> 180^0$; die Summe von 2 Nebenwinkeln $= 180^0$; alle Winkel um 1 Punct $= 4 \times 90^0 = 360^0$; alle Winkel aus gemeinschaftlichem Scheitel auf einer Seite einer g. L. $= 2 \times 90^0 = 180^0$.

Zus. 2. Zwei Winkel sind also auch einander gleich, wenn jeder einen gleichen Bogen begrenzt, oder wenn jeder gleichviel Grade enthält (vergl. §. 18 d).

e) Um auf mechanische Weise die Größe eines Bogens zu messen, welcher von den beiden Schenkeln eines Winkels begrenzt ist, oder, was dasselbe ist, um den Winkel zu messen, bedient man sich des Transporteurs oder Winkelmessers, eines Werkzeugs, welches aus einem in 180^0 eingetheilten Halbkreis besteht (Fig. 34).

f) Um nun einen Winkel (Fig. 18) zu messen, legt man den Punct c (das Centrum) des Transporteurs an den Scheitel a und die Linie c d des Transporteurs genau an den Schenkel a c; der andere Schenkel a b zeigt dann auf dem Halbkreis die Grade des Bogens oder die Größe des Winkels an.

g) Auch kann man mit dem Transporteur einen Winkel, dessen Größe nach Graden angegeben ist, an eine g. L. auf das Papier zeichnen. Soll z. B. an die g. L. a c (Fig. 18) ein Winkel von 45^0 gezeichnet werden, so legt man den Punct c des Transporteurs an a und die L. c d des Transporteurs genau an a c und bezeichnet nun die Stelle, wo auf dem Transporteur 45 steht, mit einem Puncte (b) und zieht dann b a, so ist Winkel b a c $= 45^0$.

§. 24. Lehrsatz.

Gleiche Centriwinkel eines Kreises haben gleiche Sehnen und gleiche Bogen und der größere Centriwinkel hat auch eine größere Sehne und einen größeren Bogen.

Beweis: Er fließt eigentlich schon aus dem vorhergehenden §.; doch kann man sich die beiden Winkel auf einander gelegt denken; wird nämlich Fig. 113 $\llcorner$ z auf $\llcorner$ x und der Schenkel d b auf d a gelegt, so muß b auf a fallen; denn d b $=$ d a als Halbmesser und der andere Schenkel d c fällt ja ohnehin mit d c vom andern Winkel zusammen; denn die Winkel sind ja gleich. Deshalb muß auch die Sehne a c $=$ b c

und der Bogen $ac = bc$ sein. Leicht läßt sich nun auf ähnliche Weise zeigen, daß ein größerer Centriwinkel auch eine größere Sehne und einen größeren Bogen haben müsse.

Zus. 1. Der umgekehrte Lehrsatz heißt: Zu gleichen Bogen und gleichen Sehnen eines Kreises gehören auch gleiche Centriwinkel, und zu einem größern Bogen oder einer größern Sehne gehört auch ein größerer Centriwinkel.

Zus. 2. Ist der Centriwinkel ein gestreckter Winkel, so ist der dazu gehörige Bogen der Halbkreis.

Uebungsaufgaben.

1) Wie groß ist die Summe zweier Winkel, von denen der eine 15° 45′ 36″ und der andere 14° 59′ 34″ groß ist?

2) Wie groß ist die Differenz der beiden Winkel in der ersten Aufgabe?

3) Wie groß ist ein Winkel, welcher 6mal so groß ist, als der Winkel von 2° 24′ 38″.

4) Ein Winkel von 24° 45′ 37″ soll in zwei gleiche Theile getheilt werden; wie groß ist ein Theil?

5) Ein Winkel von 31° 1′ 24″ soll in 3 gleiche Theile getheilt werden; wie groß ist ein Theil?

6) Wenn die Summe zweier gleicher Winkel 90° 30′ $2\frac{1}{2}$″ beträgt; wie groß ist jeder Winkel?

7) Zeichne mittelst des Transporteurs $\frac{1}{2}$ **R**; $\frac{1}{4}$ **R**; $\frac{1}{3}$ **R**; $\frac{3}{4}$ **R**; $\frac{2}{3}$ **R**.

8) Zeichne mittelst des Transporteurs folgende Winkel: 60°; 45°; 75°; 15°; 105°; 165°; 170°.

9) Zeichne einen Winkel von 112° und an diesen Winkel noch einen andern, so daß die zwei Winkel Nebenwinkel bilden.

10) Zeichne einen beliebigen Winkel; betrachte ihn als einen Scheitelwinkel und zeichne dann noch den zweiten Scheitelwinkel.

11) Ziehe mit zwei verschiedenen Halbmessern zwei Kreise und zeichne in jeden mittelst des Transporteurs einen Centriwinkel von 45°.

12) Errichte mittelst des Transporteurs aus irgend einem Punct einer g. L. einen Perpendikel.

13) Zeichne mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel, der 2 oder 3 oder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{3}$ mal so groß ist, als ein gegebener Winkel.

14) Zeichne einen Winkel, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

15) Zeichne zu einem Winkel von 145° einen zweiten Winkel, so daß die beiden ∠∠ einen flachen ausmachen; wie groß ist der zweite Winkel?

V. Von den Parallellinien.

§. 25. Erklärungen.

a) Zwei oder mehrere Linien, in derselben Ebene liegend, welche in allen Puncten gleichweit von einander entfert bleiben und, selbst wenn sie unendlich verlängert würden, nie zusammentreffen, heißen Parallellinien. Diese können sowohl von geraden, als von krummen Linien gebildet werden (Fig. 35).

b) Gerade Linien, welche keine Parallellinien sind, nähern sich auf einer Seite und heißen hier convergirend (Fig. 36 a) und entfernen sich auf der andern Seite, und heißen hier divergirend (Fig. 36 b). Convergirende g. Ll. sind jedesmal auch divergirend und umgekehrt.

c) Treffen convergirende Linien in einen Punct zusammen, so heißt dieser Punct Vereinigungspunct; geht eine von diesen Linien durch den Vereinigungspunct, die andere nicht, so heißt der Punct Durchgangspunct; gehen beide Linien durch den Vereinigungspunct, so heißt der Punct Durchschnittspunct (§. 7 d u. §. 11 Zus. 1).

§. 26. Erklärung.

Wenn 2 Parallellinien von einer dritten g. L. durchschnitten werden (Fig. 37), so entstehen

a) in Rücksicht auf die Parallellinien
innere Winkel, nämlich: c, d, e, f und
äußere Winkel, nämlich: a, b, g, h.

b) in Rücksicht auf die schneidende L.
innere Gegenwinkel c und e; d und f;
äußere „ g und a; h und b;
innere Wechselwinkel c und f; e und d;
äußere „ g und b; h und a;
innere und äußere Gegenwinkel a und e; b und f; g und c; h und d.

§. 27. Lehrsatz.

Bei Parallellinien ist jeder äußere Winkel seinem inneren Gegenwinkel gleich.

Beweis: Ist also Fig. 37 AB || CD, so ist a = e; g = c; b = f; h = d. Die Wahrheit dieses Lehrsatzes ist außer Zweifel, obwohl er nicht streng wissenschaftlich bewiesen werden kann. Wenn man überlegt, daß Parallellinien ganz gleiche Lage haben, weil sie in allen Puncten gleich weit von einander entfernt sind (§. 25 a), so müssen beide von

einer andern geraden Linie auch unter gleichen Winkeln durchschnitten werden. Ist aber jeder äußere Winkel seinem inneren Gegenwinkel gleich, so läßt sich die Richtigkeit der folgenden Lehrsätze wohl nachweisen.

§. 28. Lehrsatz.

Bei Parallellinien sind zwei innere Gegenwinkel zusammen $= 2$ R.

Beweis: In Fig. 37 ist $\angle a = \angle e$ (§. 27), folglich sind auch $\angle\angle\, a + c = \angle\angle\, e + c$ (IV). Da aber $a + c = 2$ R (§. 20 Zus. 1) so sind auch $e + c = 2$ R. (Der Beweis für die $\angle\angle\, f + d$ wird in derselben Weise geführt.)

Zus. Da zwei innere Gegenwinkel zusammen 2 R oder einen flachen Winkel ausmachen, und der eine also den andern zu einem flachen gleichsam ergänzt, so heißt man diese Winkel auch Ergänzungswinkel.

§. 29. Lehrsatz.

Bei Parallellinien sind zwei äußere Gegenwinkel zusammen $= 2$ R.

Beweis: In Fig. 37 ist $\angle e = \angle a$ (§. 27); folglich sind auch $\angle\angle\, e + g = \angle\angle\, a + g$ (IV), und die $\angle\angle\, e + g = 2$ R (§. 20 Zus. 1), so sind auch $\angle\angle\, a + g = 2$ R. (Der Beweis für die $\angle\angle\, b + h$ wird ebenso geführt.)

§. 30. Lehrsatz.

Bei Parallellinien sind zwei innere Wechselwinkel einander gleich.

Beweis: Da in Fig. 37 sowohl $\angle\angle\, c + e$ als $\angle\angle\, f + e = 2$ R (§. 28 u. §. 20), so sind $\angle\angle\, c + e = \angle\angle\, f + e$ (II); zieht man nun $\angle e$ ab, so ist $\angle c = \angle f$ (V). (Der Beweis für $\angle d$ und $\angle e$ ist ebenso zu liefern.)

§. 31. Lehrsatz.

Bei Parallellinien sind zwei äußere Wechselwinkel einander gleich.

Beweis: Da in Fig. 37 $\angle a = \angle e$ (§. 27) und auch $\angle h = \angle e$ (§. 22), so ist auch $\angle a = \angle h$ (II). (Der Beweis für $\angle b$ und $\angle g$ ist ähnlich zu führen.)

§. 32. Lehrsatz.

Bei Parallellinien ist ein äußerer und ein innerer Wechselwinkel $= 2$ R.

Beweis: Da in Fig. 37 $\angle a = \angle e$ (§. 27), so sind auch $\angle\angle\, a + f = e + f$ (IV); da aber $e + f = 2$ R (§. 20 Zus. 1), so sind auch $\angle\angle\, a + f = 2$ R. (Der Beweis für die übrigen $\angle\angle$ wird in derselben Weise geführt.)

Zus. 1. Wenn 2 g. Ll. von einer dritten so durchschnitten werden, daß die innern und äußern Gegenwinkel gleich sind, oder
daß die äußern Gegenwinkel = 2 R sind, oder
daß die innern Wechselwinkel einander gleich sind,
u. s. w.
so sind die durchschnittenen Ll. ||.

Zus. 2. Wenn zwei g. Ll. (Fig. 37) Ax und Co auf einer andern EF unter gleichen schiefen ∠ (a = e und c = g) aufstehen, so sind jene Ll. ||, und sind die zwei Ll. Ax und Co ||, so sind die ∠ gleich.

Zus. 3. Würde die g. L. EF (Fig. 37) die beiden andern senkrecht durchschneiden, so würde wieder ∟a = ∟e und ∟c = ∟g und Ax und Co würden senkrecht auf EF stehen; folglich sind auch g. L. (Ax und Co) die auf einer dritten g. L. (EF) senkrecht stehen, ||.

§. 33. Aufgabe.

Parallellinien zu ziehen.

1. Aufl. Ziehe (Fig. 38) mit beliebigem Halbmesser zwei gleiche Kreise und dann die Linien ab und cd, welche jeden Kreis nur an einem Puncte berühren.

Beweis: Vereinige die Berührungspuncte mo und np durch g. Ll., welche durch das Centrum gehen. Diese Ll. sind einander gleich, d. h. mo = np weil sie beide Durchmesser von gleichen Kreisen sind (§. 14); folglich ist ab || cd, weil die Entfernung der beiden Ll. gleich ist. (§. 25.)

2. Aufl. Ziehe (Fig. 39) aus zwei Puncten o, p einer gegebenen L. ab gleiche Halbkreise und dann die L. cd, welche die beiden Halbkreise nur an einem Puncte berührt.

Beweis: Die L. mo = np (§. 14. Zus. 1); folglich ist cd gleich weit von ab, und also cd || ab (§. 25).

3. Aufl. Ziehe auf der gegebenen L. ab (Fig. 40) eine beliebige g. L. gc; setze den Zirkel in g und ziehe den Bogen ce und von einem andern Puncte (f) der gegebenen Linie mit gleicher Zirkelöffnung den Bogen ih; miß mit dem Zirkel den Bogen ec und mache hd = ec; ziehe kl.

Beweis: gc = fd (§. 14. Zus. 1)
ec = hd (Vers.)
∟m = ∟n (§. 24)
gc || fd (§. 32. Zus. 2).

Da nun zugleich g c = f d, so müssen die Puncte c und d auch gleich weit von den Puncten g und f entfernt sein; folglich ist auch k l ∥ a b (§. 25). (S. auch §. 32. Zus. 2.)

§. 34. Zusätze.

Zus. 1. Soll mit a b (Fig. 40) durch einen Punct (c), der außer ihr liegt, eine ∥ L. gezogen werden, so setze den Zirkel in einen beliebigen Punct der L. a b, etwa in g und ziehe den Bogen c e; ziehe ferner von einem andern Punct, etwa von f aus mit gleicher Oeffnung des Zirkels einen Bogen und mache d h = c e; ziehe zuletzt durch c und d die L. k l, so ist k l ∥ a b. (Beweis: §. 33.)

Zus. 2. Oder, wenn mit a b (Fig. 41) durch einen Punct (c), der außer ihr liegt, eine ∥ L. gezogen werden soll, so verfahre also: setze den Zirkel in c, eröffne ihn bis zur L. a b und ziehe einen Bogen, der die L. a b nur in einem Puncte (d) berührt; setze dann den Zirkel in einen beliebigen Punct der L. a b (etwa in e) und ziehe mit gleicher Oeffnung den Bogen g h und durch c die L. k l so, daß sie den Bogen g h nur in einem Puncte f berührt, so ist k l ∥ a b. (Der Beweis fließt aus der 2. Aufl. (§. 33).

Anmerk. 1. Einige andere Auflösungen, ∥ Ll. zu ziehen, folgen später.

Anmerk. 2. a) Parallellinien können auf mechanische Weise mit Hilfe des Parallellineals, der Reißschiene, des Winkelhakens und des Winkeldreiecks gezogen werden.

b) Das Parallellineal (Fig. 42) besteht aus zwei mit Schienen aneinander befestigten Linealen, die man einander nähern oder von einander entfernen kann und die in jeder Stellung immer ∥ sind. Linien, die man am äußern Rande der Lineale zieht, laufen ∥.

c) Die Reißschiene (Fig. 43) besteht aus einem Lineal (a), welches an einem Ende mit einem über die breite Fläche des Lineals etwas hervorstehendem Querholze (b) so versehen ist, daß der ∟ x = R ist. Dieses Querholz ist in der Regel aus zwei Theilen zusammengesetzt, von denen der eine (b) feststeht, der andere (c) sich drehen läßt, aber mit einer Eisenschraube in jeder Lage befestigt werden kann. Mit dem hervorstehenden Rande des Querholzes legt man die Reißschiene an die Kante eines Tisches oder Reißbrettes an und zieht nun in beliebiger Entfernung Linien, welche alle ∥ sind.

d) Der Winkelhaken (Fig. 44) ist eigentlich nichts anderes, als eine einfache Reißschiene, aus zwei Linealen bestehend, die unter einem R mit einander verbunden sind. Durch das Anlegen eines solchen Winkelhakens an die Kante eines Brettes können nun ∥ Linien gezogen werden.

e) Das Winkeldreieck (Fig. 45) ist ein dünnes Brettchen a b c, welches bei c einen R, bei a einen ∟ von 60° und bei b einen ∟ von 30° bildet. Das Winkeldreieck läßt sich am leichtesten auf folgende Weise darstellen: ziehe aus d mit einem beliebigen Halbmesser (a d) einen Halbkreis, mache a c = a d und ziehe a c und c b. Sollen nun auf die g. L. (Fig. 46) senkrechte ‖ Ll. gezogen werden, so setze das Winkeldreieck genau auf die gegebene L. und ziehe c d; rücke es dann nach e und ziehe e f u. s. w.

Uebungsaufgaben.

16) Ziehe zu einer gegebenen Linie eine Parallele, welche durch einen gegebenen Punct über der Linie geht.

17) Zeichne 6 gleiche Parallelen in beliebiger, aber gleicher Entfernung.

18) Mache vier beliebige Puncte und ziehe durch sie vier Parallelen.

19) Ziehe mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, in demselben einen Durchmesser und zeichne nun in gleicher Entfernung auf jeder Seite des Durchmessers und parallel mit ihm 3 Sehnen.

20) Ziehe eine wagrechte Linie, gib auf ihr in gleicher Entfernung 6 Theilungspuncte an und ziehe aus diesen Puncten Linien, die unter sich parallel laufen.

21) Zeichne 6 gleichlange Parallellinien; bedeutet a die Entfernung der ersten von der zweiten, so sei die Entfernung der dritten von der zweiten = 2 a; die der vierten von der dritten = 3 a; die der fünften von der vierten = 4 a und die der sechsten von der fünften = 5 a.

22) Zeichne 4 gleichlange Parallellinien; ist die Entfernung der ersten von der zweiten = a, so sei die Entfernung der dritten von der zweiten = ½ a; die der vierten von der dritten = ¼ a.

VI. Von den Figuren im Allgemeinen.

§. 35. Erklärungen.

a) Eine Fläche, welche nach allen Seiten hin völlig begrenzt ist, heißt Figur.

b) Ist die begrenzte Fläche eben, so heißt sie eine ebene Figur, ist sie krumm, eine krumme Figur.

c) Die ganze Grenze einer Figur, d. h. ihre Grenzlinien zusammengenommen, heißt Umfang oder Perimeter.

d) Ist diese Grenze von g. Ll. gebildet, so heißt die Figur eine geradlinige; ist sie aber von krummen Ll. oder nur von einer einzigen

krummen L. gebildet, krummlinige, und besteht sie theils aus geraden, theils aus krummen Ll. eine gemischtlinige Figur.

§. 36. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien können keine Figur bilden.

Beweis: Da 2 Linien nur 1 Punct gemeinschaftlich haben können (§. 11. Zus. 2), so können sich die Linien ab und ac (Fig. 18) nicht nochmals durchschneiden, was sie nothwendig thun müßten, wenn sie eine Fläche nach allen Seiten begrenzen und also eine Figur bilden sollten.

§. 37. Erklärungen.

a) Jede einzelne Umfangslinie einer geradlinigen Figur heißt eine Seite, und der Winkel zweier zusammentreffenden Seiten eine Ecke.

b) Die von den Seiten oder Umfangslinien eingeschlossene Fläche (Raum) ist der Flächenraum oder Flächeninhalt der Figur.

c) Jede g. L. von einer Ecke zur andern, ohne daß sie mit einer Seite der Figur zusammenfällt, heißt Diagonale oder Diagonallinie (Fig. 47 a b).

Zus. Da der Kreis eine Figur ist, die nur von einer einzigen krummen L. begrenzt wird, so kann bei ihm von Seiten, Ecken und Diagonallinien keine Rede sein. Dieses gilt auch von allen den Figuren, deren Grenze eine einzige krumme L. ist.

d) Jede geradlinige Figur heißt Vieleck und Polygon.

e) Ein Vieleck heißt regulär oder regelmäßig, wenn alle seine Seiten und Winkel einander gleich sind; ist dieß nicht der Fall, so heißt es irregulär oder unregelmäßig.

f) Die geradlinigen Figuren benennt man nach der Zahl der Seiten oder Ecken.

g) Eine von 3 g. Ll. begrenzte Fläche heißt Dreieck (△);
„ „ 4 „ „ „ „ „ Viereck;
„ „ 5 „ „ „ „ „ Fünfeck;
u. s. w.

Eine von n g. Ll. begrenzte Fläche heißt n-Eck.

§. 38. Erklärungen.

a) Eine Figur ist einer andern gleich (§. 8), wenn sie dieselbe Größe besitzt, d. h. wenn der Flächeninhalt in beiden Figuren gleich ist.

b) Eine Figur ist einer andern congruent, wenn nicht nur der Flächeninhalt, sondern auch die Seiten und Winkel in beiden Figuren der Ordnung nach an Größe genau übereinstimmen. Man sagt in diesem Falle: die Figuren decken sich, d. h., würde man die eine Figur auf

die andere legen, so würden die Seiten auf einander zu liegen kommen, und die eine Figur würde die andere also genau bedecken.

VII. Von den Dreiecken.

A) Von den Winkeln und Seiten der Dreiecke.

§. 39. Erklärungen.

Ein Dreieck ist

a) nach den Seiten:

1) ein ungleichseitiges Dreieck, wenn alle 3 Seiten unter sich ungleich sind (Fig. 48);

2) ein gleichschenkliges Dreieck, wenn nur 2 Seiten unter sich gleich sind (Fig. 49);

3) ein gleichseitiges Dreieck, wenn alle 3 Seiten unter sich gleich sind (Fig. 50).

b) nach den Winkeln:

1) ein spitzwinkliges Dreieck, wenn es 3 spitzige Winkel hat (Fig. 50);

2) ein stumpfwinkliges Dreieck, wenn es 1 stumpfen Winkel hat (Fig. 48);

3) ein rechtwinkliges Dreieck, wenn es 1 **R** hat (Fig. 51).

§. 40. Erklärungen.

a) Im rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, welche den **R** bilden, Katheten (Fig. 51 a b und a c) und die dem **R** gegenüberstehende Seite heißt Hypotenuse (Fig. 51 b c).

b) Nimmt man eine Seite des Dreiecks als Basis oder Grundlinie an, so nennt man die gegenüberstehende Ecke die Spitze des Dreiecks.

c) Im gleichschenkligen Dreieck nimmt man gewöhnlich die Ecke als Spitze an, welche durch die gleichen Seiten gebildet wird.

d) Eine senkrechte Linie von der Spitze des Dreiecks auf die Grundlinie heißt die Höhe des Dreiecks, (Fig. 49 b a). Bei einem stumpfwinkligen Dreieck muß manchmal die Grundlinie verlängert werden, weil die senkrechte Linie dieselbe sonst nicht treffen würde.

e) Ist ein Winkel an der Grundlinie des Dreiecks ein **R** (Fig. 51 ∟ a), so fällt die Höhe mit einer Seite (a c) des Dreiecks zusammen.

§. 41. Lehrsatz.

In jedem Dreieck sind 2 Seiten zusammengenommen immer größer, als die dritte Seite.

Beweis: In dem $\triangle abc$ (Fig. 51) ist $ca + ab > cb$, weil zwischen den zwei Puncten c und b die g. L. der kürzeste Weg ist (§. 11. 1), die Summe zweier Seiten aber immer eine gebrochene g. L. bildet.

§. 42. Lehrsatz.

In jedem Dreieck ist die Summe aller Winkel $= 2\,\mathbf{R} = 180^\circ$.

Beweis: Ziehe in Fig. 52 $cd \parallel ab$; dann ist

$$\angle m = \angle y \text{ (§. 30)}$$
$$\angle n = \angle z \text{ (§. 30)}$$
$$\angle x = \angle x \text{ (I)}$$
$$\overline{\angle\angle\, m + n + x = \angle\angle\, y + z + x \text{ (IV)}}$$

Da aber $\angle\angle\, m + n + x = 2\,\mathbf{R}$ (§. 20. Zus. 7)

$$\overline{\angle\angle\, y + z + x = 2\,\mathbf{R} = 180^\circ.}$$

Zus. 1. Zwei $\angle\angle$ eines $\triangle$ sind zusammengenommen also immer $<$ als $2\,\mathbf{R}$.

Zus. 2. In einem $\triangle$ kann nur 1 stumpfer $\angle$ oder 1 **R** sein. Die beiden andern $\angle\angle$ müssen also spitzige $\angle\angle$ sein, weil beide zusammengenommen nur so groß, als ein **R** sind.

Zus. 3. Ist die Größe zweier $\angle\angle$ in einem $\triangle$ bekannt, so findet man die Größe des dritten $\angle$, wenn man die Summe der beiden bekannten $\angle\angle$ von 180° abzieht.

Zus. 4. Sind in 2 $\triangle$ zwei $\angle\angle$ einander gleich, so stimmt die Größe des dritten $\angle$ auch überein.

Zus. 5. Ist in einem $\triangle$ ein $\angle$ so groß, als die beiden andern $\angle\angle$ zusammengenommen, so ist der erstere $\angle$ = der Hälfte von der Summe aller $\angle\angle$ in einem $\triangle$, folglich $= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ = \mathbf{R}$.

§. 43. Erklärung.

Verlängert man irgend eine Seite eines Dreiecks, so heißt der Winkel, welcher außerhalb der Figur entsteht, Außenwinkel (Fig. 53 x).

§. 44. Lehrsatz.

Der Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß, als die beiden innern ihm gegenüber liegenden Winkel zusammengenommen (Fig. 53).

Beweis: $\angle n + \angle x = 2\,\mathbf{R}$ (§. 20. Zus. 1)

$$\angle\angle\, o + m + n = 2\,\mathbf{R} \text{ (§. 42)}$$
$$\overline{\angle\angle\, n + x = \angle\angle\, o + m + n \text{ (II)}}$$
$$\angle n = \angle n \text{ (I)}$$
$$\overline{\angle x = \angle\angle\, o + m \text{ (V)}}$$

Zus. Der Außenwinkel eines △ ist also immer größer, als einer der beiden innern ihm gegenüber liegenden ∠∠.

§. 45. Lehrsatz.

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

Beweis: Wenn ich das △ a b c (Fig. 54) umdrehen könnte, so daß die Seite a c auf b c und b c auf a c fiele, so müßte a auf b und b auf a fallen, weil nach der Bedingung a c = b c ist; folglich würde auch a b auf b a fallen und die beiden △ würden sich decken (§. 38 b) und ∠ m ist dann = ∠ n.

Zus. 1. Wenn die Größe des einen ∠ im gleichschenkligen △ bekannt ist, so ist auch die Größe der beiden anderen bestimmt.

Zus. 2. Wenn in einem △ 2 ∠∠ = sind, so sind auch die den gleichen ∠∠ gegenüberstehenden Seiten =, und das △ ist ein gleichschenkliges.

§. 46. Lehrsatz.

In jedem Dreieck steht der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Beweis:

Mache in Fig. 55 c d = c a und ziehe a d; dann ist ∠ m = ∠ n (§. 45)

und ∠∠ m + o > ∠ n

Da aber ∠ n = ∠∠ p + o (§. 44)

und also ∠ n > p (III Zus.)

∠∠ m + o > p, d. h. ∠ c a b > c b a.

§. 47. Zusätze.

Zus. 1. In jedem △, in welchem 2 ∠∠ ungleich sind, liegt dem größeren ∠ auch die größere Seite gegenüber und umgekehrt.

Zus. 2. Im rechtwinkligen △ ist die Hypotenuse, und im stumpfwinkligen △ jene die größte Seite, welche dem stumpfen ∠ gegenüber steht.

Zus. 3. Die 2 an der größten Seite eines △ anliegenden ∠∠ sind immer spitzig.

Zus. 4. Ist (Fig. 56) a c = b c, so ist ∠ o = ∠ n (§. 45); ist a b = a c, so ist ∠ n = ∠ m (§. 45); folglich ist ∠ o = ∠ n = ∠ m, d. h. im gleichseitigen △ sind alle ∠∠ einander gleich. Ein ∠ im gleichseitigen △ ist also $= \frac{2\,R}{3} = \frac{2}{3}\,R = \frac{180^0}{3} = 60^0$.

Zus. 5. Das gleichseitige △ ist eine reguläre Figur (§. 37 e).

B) Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 48. Lehrsatz. (Erster Fall).

2 Dreiecke sind congruent, wenn 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in beiden Dreiecken gleich sind.

Beweis: Denkt man sich die beiden △ (Fig. 56) in welchen a b = d e und a c = d f und ∟ o = ∟ p sind, so auf einander gelegt, daß a auf d fällt und a c in die Richtung d f zu liegen kommt, so muß auch a b auf d e fallen (§. 18 d); da ferner a b = d e, so muß auch b auf e fallen (§. 11. 1); ebenso fällt auch c auf f und da zwischen c und b und zwischen f und e auch nur 1 g. L. möglich ist, so fällt auch c b auf f e. Folglich ist auch ∟ m = ∟ q und ∟ n = ∟ r, oder alle ∟∟ und Seiten sind der Ordnung nach gleich und demnach △ a b c ≌ △ d e f (§. 38 b).

Zus. 1. Ein △ ist durch 2 Seiten und den eingeschlossenen ∟ vollkommen bestimmt.

Zus. 2. Da beim rechtwinkligen Dreieck der durch die Katheten eingeschlossene Winkel immer ein R ist, so sind 2 rechtwinklige △ schon congruent, wenn die beiden Katheten des einen △ den beiden Katheten des andern △ gleich sind.

§. 49. Lehrsatz. (Zweiter Fall).

2 Dreiecke sind congruent, wenn 1 Seite und die beiden anliegenden Winkeln in beiden Dreiecken gleich sind.

Beweis: Wenn in Fig. 56 ∟ o = p und n = r und a b = d e ist, so ist auch ∟ m = ∟ q (§. 42. Zus. 4). Denkt man die beiden △ so auf einander gelegt, daß a auf d und b auf e fällt, so liegt a b genau auf d e; a c fällt nun auf d f, und der Punct c liegt also entweder in der L. d f oder in deren Verlängerung. Ebenso fällt b c auf e f, und der Punct c liegt entweder in der L. e f oder in deren Verlängerung. Da nun c in beiden Ll. d f und e f liegen muß, so kann er nur in ihrem Vereinigungspuncte f liegen. Folglich ist auch a c = d f und b c = e f. Es sind also in beiden △ alle ∟∟ und Seiten der Ordnung nach gleich und demnach △ a b c ≌ △ d e f (§. 38 b).

Zus. Ein △ ist durch 1 Seite und die beiden anliegenden ∟∟ der Form und Größe nach vollkommen bestimmt.

§. 50. Lehrsatz. (Dritter Fall).

2 Dreiecke sind congruent, wenn die 3 Seiten in beiden Dreiecken gleich sind.

Beweis: Denkt man die beiden △ (Fig. 56) in welchen ab = de; ac = df und bc = ef sind, so auf einander gelegt, daß a auf d und b auf e fällt, so liegt auch ab genau auf de (§. 11. 1). Die Linie ac fällt nun entweder auf df oder rechts oder links von dieser L.; d. h. der Punct c liegt in irgend einem Puncte des Bogens B; in ähnlicher Weise fällt bc entweder auf ef oder rechts oder links von dieser L.; d. h. der Punct c liegt in irgend einem Puncte des Bogens A. Da nun c sowohl in dem Bogen B, als auch in dem Bogen A liegt, so kann c nur in dem Durchschnittspuncte dieser Bögen, also in f liegen. Da aber die 3 Seiten der △ auf einander fallen, so muß auch die Neigung dieser Seiten gleich sein, d. h. es müssen auch die 3 ∠ der Ordnung nach in beiden △ hinsichtlich der Größe übereinstimmen; folglich ist △ abc ≌ △ def (§. 38 b).

Zus. 1. Ein △ ist durch die 3 Seiten vollkommen bestimmt.

Zus. 2. In congruenten △ stehen gleichen Seiten gleiche ∠ und gleiche ∠ gleichen Seiten gegenüber.

Zus. 3. In congruenten △ sind alle Seiten und ∠ der Ordnung nach gleich.

C) Von den rechtwinkligen Dreiecken.

§. 51. Lehrsatz.

Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken eine Kathete des einen Dreiecks einer Kathete des andern Dreiecks gleich, die andere Kathete des ersten Dreiecks aber größer ist, als die zweite Kathete des zweiten Dreiecks, so ist auch die Hypotenuse des ersten Dreiecks größer, als die des zweiten Dreiecks.

Beweis: Ist (Fig. 57) abc das eine △ und abd das andere und ab die Kathete, die in beiden △ gleich ist, und die Kathete bc > bd, so ist also ac > ad. Denkt man sich die beiden △ so auf einander gelegt, wie die Figur zeigt, so gehören die beiden zu vergleichenden Linien (ac und ad) zu dem △ adc. Da nun ∟ abd = R, so ist ∟ adb ein spitziger (§. 42. Zus. 2) und sein Nebenwinkel adc also ein stumpfer (§. 20. Zus. 3) und folglich auch ac > ad (§. 47. Zus. 2).

Zus. 1. Wenn in einem △ beide Katheten größer sind, als die Katheten in einem zweiten △, so muß natürlich im ersten △ auch die Hypotenuse größer sein.

Zus. 2. Wenn in zwei rechtwinkligen △ ein Paar Katheten gleich sind, die zweite Kathete des ersten △ aber kleiner ist, als die zweite Kathete des andern △, so ist auch die Hypotenuse im ersten △ kleiner, als im zweiten.

§. 52. Lehrsatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie gleiche Hypotenuse und ein Paar gleiche Katheten haben.

Beweis: Wenn in beiden $\triangle$ (Fig. 58) die Seiten $ab = de$ und $bc = ef$ nach der Bedingung gleich sind, so sind die $\triangle$ congruent, wenn die Gleichheit der dritten Seite in beiden $\triangle$ nachgewiesen wird (§. 50). Die Seite ac ist nun entweder $>$ oder $<$ oder $=$ df. Wäre aber ac (die zweite Kathete) $>$ oder $<$ als df, so müßte nach §. 51 die Hypotenuse bc auch $>$ oder $<$ als ef sein, was der Bedingung zuwider ist; also muß $ac = df$ sein, und also auch nach §. 50 $\triangle abc \cong \triangle def$.

D) Von den gleichschenkligen Dreiecken.

§. 53. Lehrsatz.

Wenn der Winkel an der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks durch eine Linie halbirt wird, so theilt diese auch die Grundlinie in 2 gleiche Theile und steht auf derselben senkrecht.

Beweis: Ist in Fig. 59

$ac = bc$ (Bed.)

$cd = cd$ (I)

$\angle m = \angle n$ (Bed.)

$\triangle adc \cong \triangle bdc$ (§. 50), folglich ist auch $ad = db$ (§. 50. Zus. 3).

Aus der Congruenz der beiden $\triangle$ folgt aber auch, daß $\angle adc = \angle bdc$ ist; diese $\angle\angle$ sind aber Nebenwinkel und jeder ist nach §. 20. Zus. 4 ein R; folglich ist auch dc senkrecht auf ab (§. 20. Zus. 5).

Zus. Durch Umkehrung folgt aus diesem Lehrsatze: Eine Linie, welche aus dem Halbirungspuncte der Grundlinie nach der Spitze eines gleichschenkligen $\triangle$ gezogen wird, halbirt den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundlinie selbst senkrecht. (Der Beweis ist mit Hilfe des §. 50 leicht zu führen.)

§. 54. Lehrsatz.

Wenn von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ein Perpendikel auf die Grundlinie gefällt wird, so halbirt er sowohl diese, als den Winkel an der Spitze.

Beweis: Er fließt eigentlich schon aus dem vorhergehenden Satze; doch ist er leicht zu führen; denn ist in Fig. 59 cd ein Perpendikel auf ab, so sind die $\triangle$ adc und bdc rechtwinklige. Betrachtet man cd als eine Kathete, welche in beiden $\triangle$ (als eine gemeinschaftliche) gleich

ist, so muß, da auch nach der Bedingung die Hypotenusen und a c und b c gleich sind, nach §. 52 auch △ a d c ≌ △ b d c sein und nach §. 50. Zus. 3 ist auch a d = d b und ∟ m ∟ n.

Zus. 1. Durch Umkehrung dieses Lehrsatzes ergeben sich folgende Sätze: Wird aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen △ ein Perpendikel errichtet, so geht er, gehörig verlängert, durch die Spitze des △; — wird der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen △ halbirt, so ist diese Halbirungslinie ein Perpendikel auf der Grundlinie (vergl. §. 53).

Zus. 2. Da jedes gleichseitige △ als ein gleichschenkliges betrachtet werden kann, so gelten natürlich die beiden vorhergehenden Lehrsätze auch vom gleichseitigen Dreieck.

E) Aufgaben.

§. 55. Aufgabe.

Aus einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck zu verfertigen.

Aufl. Die gegebene L. sei A (Fig. 60). Ziehe eine g. L. a b = A, mache von a und b aus mit einem Halbmesser = A Kreuzbögen in c und ziehe a c und b c, so ist △ a b c ein gleichseitiges.

Beweis: a b = A (Verf.)
a c = A (Verf.)
b c = A (Verf.)
a b = a c = b c, d. h. △ abc ist ein gleichseitiges (§. 39).

§. 56. Aufgabe.

Aus einer Grundlinie A und einer zweiten Linie B ein gleichschenkliges Dreieck zu verfertigen.

Aufl. Ziehe (Fig. 61) eine g. L. a b = A, mache mit einem Halbmesser = B von a und b aus Kreuzbögen in c und ziehe a c und b c, so ist △ a b c ein gleichschenkliges.

Beweis: a b = A (Verf.), b c = a c = B (Verf.); folglich sind 2 Seiten einander gleich und △ a b c ist ein gleichschenkliges (§. 39).

§. 57. Aufgabe.

Aus drei gegebenen geraden Linien, welche einander nicht gleich sind, ein ungleichseitiges Dreieck zu verfertigen.

Aufl. Die drei gegebenen Linien seien A, B und C (Fig. 62). Ziehe a b = A; mache von a aus mit dem Halbmesser = B über der L. a b einen Bogen und mit dem Halbmesser = C von b aus auch einen

Bogen, der den ersten in c durchschneidet; ziehe a c und b c, so ist △ a b c das verlangte ungleichseitige △.

Beweis: Da a b = A, a c = B und b c = C (Verf.), so ist das △ aus den gegebenen 3 Seiten verfertigt und da diese unter sich ungleich sind, so ist △ a b c ein ungleichseitiges (§. 39).

§. 58. Aufgabe.

Aus 2 gegebenen geraden Linien und einem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein spitzwinkliges, stumpfwinkliges oder rechtwinkliges Dreieck zu verfertigen.

Aufl. Ziehe eine g. L., setze den gegebenen ∟ mittelst des Transporteurs oder Zirkels an einen Endpunct an, mache die beiden Schenkel des nun gezeichneten ∟ = den gegebenen 2 g. Ll. und vereinige die Endpuncte der Schenkel durch eine dritte g. L. Der Beweis ergibt sich aus der Verfertigung.

§. 59. Aufgabe.

Eine gerade Linie in 2 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Mache (Fig. 63) a b = der zu theilenden L.; ziehe dann von a und b aus Kreuzbögen in c und d mit gleicher Oeffnung des Zirkels, und von c nach d die g. L. c d, so ist a e = e b.

Beweis: a c = b c, a d = b d (§. 14. Zus. 1)
c d = c d (I)

△ a c d ≅ △ b c d (§. 50)

∟ m = ∟ n (§. 50. Zus. 3)

ferner ist a c = b c (§. 14. Zus. 1)
e c = e c (I)
∟ m = ∟ n

△ a c e ≅ △ b c e (§. 48)

a e = e b (§. 50. Zus. 3).

Zus. Durch fortgesetzte Theilung kann eine Linie in 4, 8, 16 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden.

§. 60. Aufgabe.

Aus irgend einem Puncte einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu errichten.

Aufl. Ist (Fig. 64) e der Punkt, so mache e a = e b und von a und b mit gleicher Oeffnung des Zirkels Kreuzbögen in c und ziehe c e, so ist c e senkrecht auf a b.

Beweis: $ac = bc$ (§. 14. Zus. 1)
$ea = eb$ (Vers.)
$ce = ce$ (I)

$\triangle ace \cong \triangle bce$ (§. 50)

$\llcorner x = \llcorner z$ (§. 50. Zus. 3).

Die $\llcorner\llcorner$ x und z sind aber Nebenwinkel, folglich $\llcorner x = R$ und $\llcorner z = R$ (§. 20. Zus. 4), folglich ist c e senkrecht auf a b (§. 20. Zus. 5).

§. 61. Aufgabe.

Von einem bestimmten Puncte außerhalb einer geraden Linie einen Perpendikel auf dieselbe zu ziehen.

Aufl. Ist (Fig. 65) c der gegebene Punct, so ziehe von ihm, als dem Centrum, einen Bogen, der die gegebene L. a b in zwei Puncten d und e schneidet; von d und e mache mit gleicher Oeffnung des Zirkels Kreuzbögen in f und ziehe c f, so steht c g senkrecht auf a b.

Beweis $\left.\begin{array}{l} dc = ec \\ df = ef \end{array}\right\}$ (§. 14. Zus. 1)
$cf = cf$ (I)

$\triangle cdf \cong \triangle cef$ (§. 50)

$\llcorner m = \llcorner n$ (§. 50. Zus. 3)
ferner $dc = ec$ (§. 14. Zus. 1)
$cg = cg$ (I)
$\llcorner m = \llcorner n$

$\triangle dcg \cong \triangle ecg$ (§. 48)

$\llcorner o = \llcorner p$ (§. 50. Zus. 3);

folglich ist auch c g senkrecht auf a b (§. 20. Zus. 4 und 5).

Zus. 1. Ein R kann auch dadurch gezeichnet werden, daß man eine g. L. senkrecht auf eine andere fällt.

Zus. 2. Von c auf a b ist nur 1 Perpendikel möglich; denn jede andere L. ist länger, als c g.

§. 62. Aufgabe.

Am Ende einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu errichten.

1. Aufl. Soll (Fig. 66) an b die senkrechte L. errichtet werden, so ziehe eine beliebige L. b c so, daß $\llcorner$ n spitzig ist. Betrachte c als das Centrum und ziehe mit dem Halbmesser c b eine Kreislinie, welche die gegebene L. in e durchschneidet; endlich ziehe e d und d b, so ist d b senkrecht auf a b.

Beweis: $ce = cb$ (§. 14. Zuſ. 1)

$\angle m = n$ (§. 55)

ferner $cb = cd$ (§. 14. Zuſ. 1)

$\angle p = \angle o$ (§. 45)

folglich $\angle\angle\ m + p = \angle\angle\ n + o$ (IV)

Da nun in dem $\triangle\ ebd$ der $\angle\ (n + o) = \angle\angle\ m + p$, ſo iſt $\angle\ (n + o) = R$ (§. 42. Zuſ. 5); folglich iſt d b ſenkrecht auf a b (§. 20. Zuſ. 5).

2. Aufl. Nimm (Fig. 66) auf der gegebenen L. a b einen beliebigen Punct e an; errichte über e b ein gleichſchenkliges $\triangle\ ebc$; verlängere e c nach d; mache $cd = ec$ und ziehe d b, ſo iſt d b ſenkrecht auf a b.

Beweis: S. den Beweis zur 1. Auflöſung, oder beweiſe ſo: Im $\triangle\ ebd$ ſind die 3 $\angle\angle$, nämlich: $\angle\angle\ m + (n + o) + p = 180^0 = 2\ R$ (§. 42); da aber $\angle\ m = \angle\ n$ und $\angle\ o = \angle\ p$ (§. 45), ſo kann einer dieſer gleichen $\angle\angle$ für den andern geſetzt werden, folglich iſt auch $\angle\angle\ n + n + o + o$ oder $2\,n + 2\,o = 180^0 = 2\,R$ und $\angle\angle\ n + o = \frac{180^0}{2} = 90^0 = R$ und d b ſteht ſenkrecht auf a b (§. 20. Zuſ. 5).

Anmerk. Man kann dieſe Aufgabe auch nach §. 60 löſen. Soll (Fig. 67) an b eine ſenkrechte L. gezogen werden, ſo verlängere a b und mache $bc = bd$ und von d und c Kreuzbögen in e und ziehe e b. Der Beweis wird ganz nach §. 60 geliefert.

§. 63. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Aufl. Iſt (Fig. 68) der $\angle\ bac$ gegeben, ſo mache $ab = ac$, ziehe von b und c aus mit gleicher Oeffnung des Zirkels Kreuzbögen in d und ziehe d a, ſo iſt $\angle\ m = \angle\ n$.

Beweis: $ab = ac$ (Verf.)

$bd = cd$ (Verf. oder §. 14. Zuſ. 1)

$ad = ad$ (I)

$\triangle\ abd \cong \triangle\ acd$ (§. 50)

$\angle\ m = \angle\ n$ (§. 50. Zuſ. 3).

Zuſ. Durch fortgeſetzte Theilung kann der $\angle\ bac$ in 4, 8, 16 ꝛc. gleiche Theile getheilt werden.

§. 64. Aufgabe.

Mittelſt des Zirkels einen Winkel zu verfertigen, der einem gegebenen Winkel gleich iſt.

Aufl. Iſt (Fig. 69) a b c der gegebene $\angle$, ſo ziehe von b aus einen Bogen, der die Schenkel in d und e ſchneidet; ziehe eine beliebige

g. L. fg und mache mit demselben Halbmesser (= b d) von f aus einen Bogen, der die L. fg in h schneidet. Mache dann h i = e d und ziehe f i, so ist ∟ n = ∟ m.

Beweis: $\left.\begin{array}{l} fi = bd \\ fh = be \\ hi = ed \end{array}\right\}$ Verf.

△ f h i ≅ △ b e d (§. 50)

∟ n = ∟ m (§. 50. Zus. 3).

Zus. 1. Soll ein ∟ gezeichnet werden, der 2 oder 3 u. s. w. mal größer ist, als ein gegebener, so mache den Bogen h i (Fig. 69) 2, 3 u. s. w. mal größer oder länger, als e d.

Zus. 2. Soll ein ∟ gezeichnet werden, der $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. mal so groß sein soll, als ein gegebener, so mache den Bogen h i (Fig. 69) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. mal so groß, als e d.

Uebungsaufgaben.

23) Zeichne ein beliebiges gleichseitiges △ und zeichne auf jede Seite nochmals ein gleichseitiges △.

24) Ziehe eine beliebige Linie und zeichne ein gleichseitiges △, dessen Umfang der gezogenen L. gleich ist.

25) Zeichne ein beliebiges gleichseitiges △ und dann noch ein zweites, welches einen dreimal größern Umfang hat.

26) Zeichne ein gleichschenkliges △ und dann ein gleichseitiges, welches mit dem gleichschenkligen gleichen Umfang hat.

27) Zeichne ein gleichschenkliges △, in welchem die ungleiche Seite dem fünften Theile des ganzen Umfanges gleich ist.

28) Zeichne ein gleichschenkliges △, in welchem jeder an der ungleichen Seite anliegende Winkel 45° beträgt.

29) Zeichne ein gleichschenkliges △, von welchem die Höhe und die ungleiche Seite gegeben sind.

30) Zeichne 6 verschiedene ungleichseitige △, die aber gleichen Umfang haben.

31) Zeichne ein rechtwinkliges △, von welchem die beiden Katheten gegeben sind.

32) Zeichne ein rechtwinkliges △, von welchem die eine Kathete und der anliegende Winkel gegeben sind.

33) Zeichne ein rechtwinklinges △, von welchem die Hypotenuse und ein anliegende Winkel gegeben sind.

34) Zeichne ein gleichschenkliges △, von dem der Winkel an der Spitze 15° beträgt.

35) Zeichne ein gleichschenkliges △, von welchem der Winkel an der Spitze und die Höhe gegeben sind.

36) Zeichne ein rechtwinkliges △, in welchem der eine spitzige Winkel 30° beträgt. (Wie groß ist der andere spitzige Winkel?)

37) Zeichne ein gleichseitiges, ein gleichschenkliges und ein ungleichseitiges △, welche 3 △ aber gleichen Umfang haben sollen.

38) Zeichne zwei congruente rechtwinklige △ so aneinander, daß sie ein gleichschenkliges △ bilden.

39) Zeichne ein △, von welchem die Höhe und der Winkel an der Spitze gegeben sind.

40) Zeichne ein △, von welchem die Grundlinie und die zwei Winkel an derselben gegeben sind.

41) Theile eine wagrechte Linie in 8 gleiche Theile und errichte aus den Theilungspuncten gleiche Perpendikel.

42) Theile eine senkrechte Linie in 6 gleiche Theile und ziehe sowohl an die Endpuncte, als an die Theilungspuncte gleiche wagrechte Linien.

43) Ziehe eine wagrechte Linie und fälle durch 4 gegebene Puncte über der Linie Perpendikel auf dieselbe.

44) Zeichne mittelst des Zirkels einen ∟, der noch einmal so groß ist, als ein gegebener.

45) Zeichne einen ∟, der so groß ist, als drei gegebene ∟∟ zusammen.

46) Zeichne einen ∟, der so groß ist, als die Differenz zweier gegebener ∟∟.

47) Zeichne 3 ∟∟, von denen der nächstfolgende immer noch einmal so groß ist, als der vorhergehende.

48) Zeichne 3 ∟∟, von denen der nächstfolgende immer die Hälfte des vorhergehenden ist.

49) Zeichne mittelst des Zirkels $\frac{1}{2}$ R; $\frac{1}{3}$ R; $\frac{1}{4}$ R; $\frac{2}{3}$ R; $\frac{3}{2}$ R; $\frac{5}{4}$ R.

50) Theile mittelst des Zirkels einen gegebenen ∟ in 8 gleiche Theile.

VIII. Von den Vierecken.

A) Von den Vierecken im Allgemeinen.

§. 65. Erklärung.

In jedem Vierecke kann von der einen Ecke zur entgegengesetzten eine Diagonale gezogen werden. Durch eine solche Linie wird das Viereck in zwei Dreiecke getheilt. Folglich lassen sich die Sätze über die Dreiecke auch auf die Vierecke anwenden, wenn man sie durch eine Diagonale zerschneidet oder zerschnitten denkt.

§. 66. Lehrsatz.

In jedem Viereck sind die 4 Winkel zusammen = 4 **R** oder = 2 Flachen.

Beweis: Theile das Viereck a b c d (Fig. 70) durch eine Diagonallinie in die zwei Dreiecke a b c und c d a. Die Winkel in einem jeden dieser Dreiecke sind = 2 **R** oder = einem Flachen (§. 42); in beiden Dreiecken also = 4 **R** oder = 2 Flachen.

§. 67. Lehrsatz.

Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die zwei dazwischen liegenden Winkel in beiden Vierecken gleich sind.

Beweis: Denke die beiden Vierecke aufeinander gelegt, dann ist der Beweis ähnlich wie bei den △ §. 48 zu führen.

§. 68. Lehrsatz.

Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Winkel und die zwei dazwischen liegenden Seiten in beiden Vierecken gleich sind.

Beweis: Denke die beiden Vierecke auf einander gelegt, dann ist der Beweis in ähnlicher Weise, wie §. 49 zu führen.

Zus. Obwohl an einem Vierecke 4 Seiten und 4 Winkel sich befinden, so sind also doch nur 5 Stücke (3 Seiten mit 2 Winkeln oder 3 Winkel mit 2 Seiten) nöthig, um jedes Viereck zu bestimmen.

B) Von den Parallelogrammen.

§. 69. Erklärungen.

a) Ein Viereck, in welchem je zwei einander gegenüber liegende Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm (#); es entsteht, wenn 2 Parallellinien von zwei andern Parallellinien durchschnitten werden.

b) Ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel **R R** sind, heißt Rechteck oder Oblongum (Fig. 71); sind in einem Rechtecke alle Seiten gleich, so heißt es Quadrat (Fig. 72).

c) Ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, heißt Raute oder Rhombus (Fig. 73); sind in einem Rhombus zugleich alle Winkel **R R**, so ist der Rhombus auch ein Quadrat (Fig. 72).

d) Ein Parallelogramm, in welchem die Winkel schief und die zusammenstoßenden Seiten ungleich sind, heißt man auch Rhomboid (Fig. 74).

e) Man bezeichnet das Viereck entweder durch die 4 Buchstaben, die an seinen Ecken stehen, z. B. (Fig. 72) Viereck **a b c d**, oder blos durch 2 Buchstaben, welche an zwet gegenüber stehenden Ecken sich befinden, z. B. Viereck **a c**.

f) Nimmt man irgend eine Seite eines Parallelogramms als Grundlinie an, so ist jeder von der gegenüberstehenden Seite auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Höhe des Parallelogramms.

§. 70. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Winkel und Seiten gleich.

Beweis: Ist Fig. 75 ein #, so sind

$$\left.\begin{array}{l} \angle\angle\, a + b = 2R \\ \angle\angle\, c + b = 2R \end{array}\right\} (\text{§. } 28)$$
$$\overline{\angle a = \angle c \;(V)}$$

Daß $\angle b = \angle d$ ist, kann in ähnlicher Weise erwiesen werden.

Um ferner die Gleichheit der Seiten zu erweisen, theile das # durch eine Diagonallinie in die zwei △ **a b c** und **a d c**; diese sind congruent; denn

$$a c = a c \; (I)$$
$$\left.\begin{array}{l} \angle o = \angle n \\ \angle x = \angle z \end{array}\right\} (\text{§. } 30)$$

$\triangle abc \cong \triangle adc$ (§. 49); folglich sind auch $ab = dc$ und $ad = bc$.

Zus. 1. Ist in einem # ein ∠ ein **R**, so sind die übrigen drei ∠∠ auch **RR**; ist ein ∠ ein schiefer, so sind die andern drei auch schiefe, was leicht nachzuweisen ist.

Zus. 2. Jedes # wird durch eine Diagonale in zwei congruente △ getheilt. (Der Beweis ist so eben geführt worden.)

Anmerk. Durch Umkehrung dieses Lehrsatzes ergeben sich die beiden folgenden Sätze.

§. 71. Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so sind sie auch parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Beweis: Sind in dem Viereck Fig. 75 die gegenüberstehenden Seiten gleich, so ist $\triangle\, a c d \cong \triangle\, a c b$ (§. 50)

$$\left.\begin{aligned} \angle z &= \angle x \\ \angle o &= \angle n \end{aligned}\right\} \text{(§. 50. Zus. 3)}$$

$$\left.\begin{aligned} a d &\parallel b c \\ a b &\parallel d c \end{aligned}\right\} \text{(§. 30 u. 32. Zus. 1)}$$

$a b c d$ ist ein $\#$ (§. 69 a).

§. 72. Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck die einander gegenüberstehenden Winkel gleich sind, so sind die gegenüberstehenden Seiten parallel und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Beweis: Sind in dem Viereck $a b c d$ (Fig. 72) die gegenüber stehenden $\angle\angle$ gleich, so sind $\angle\angle\, o + m + n + p = 4\, R$ (§. 66)

$$\text{Nun ist } \left.\begin{aligned} \angle o &= \angle n \\ \angle m &= \angle p \end{aligned}\right\} \text{(Bed.)}$$

$$\angle\angle\, o + m = \angle\angle\, n + p \text{ (IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} \angle\angle\, o + m &= 2 R \\ \angle\angle\, n + p &= 2 R \end{aligned}\right\} \text{(§. 66)}$$

$a b \parallel d c$ (§. 28 u. §. 32. Zus. 1)

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{aligned} \angle m &= \angle p \\ \angle n &= \angle o \end{aligned}\right\} \text{(Bed.)}$$

$$\angle\angle\, m + n = \angle\angle\, p + o \text{ (IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} \angle\angle\, m + n &= 2 R \\ \angle\angle\, p + o &= 2 R \end{aligned}\right\} \text{(§. 66)}$$

$a d \parallel b c$ (§. 28 u. §. 32. Zus. 1)

folglich ist auch $a b c d$ ein $\#$ (§. 69 a).

§. 73. Zusätze.

a) Parallellinien zwischen Parallellinien sind gleich lang.

b) Zwischen zwei Parallellinien sind alle Perpendikel unter sich gleich und parallel.

c) Parallellinien können also auch noch so gezogen werden, daß man auf einer gegebenen g. L. $a b$ (Fig. 39) aus 2 beliebigen Puncten (o und p) 2 Perpendikel $o m = p n$ errichtet und die Endpuncte m und n

durch eine g. L. verbindet, oder daß man (Fig. 40) auf einer gegebenen L. a b unter einem beliebigen ∟ zwei gleichlange || Ll. (g c = und || f d) zieht und die Endpuncte c und d durch eine g. L. verbindet (vergl. §. 32. Zus. 2 u. 3).

§. 74. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme halbiren sich die beiden Diagonalen gegenseitig. (Diesen Durchschnittspunct der Diagonalen heißt man Mittelpunct des Parallelogramms.)

Beweis: In dem # a b c d (Fig. 76) ist d c = a b (Bed.)

$$\left.\begin{array}{l} \llcorner m = \llcorner p \\ \llcorner n = \llcorner o \end{array}\right\} (\S.\ 30)$$

$$\triangle a e b \cong \triangle d e c\ (\S.\ 49)$$

$$\left.\begin{array}{l} a e = e c \\ b e = e d \end{array}\right\} (\S\ 50.\ \text{Zus.}\ 3)$$

Zus. 1. Folglich können noch auf folgende Art Parallellinien gezogen werden: ist nämlich (Fig. 76) a b gegeben und es soll durch c eine Linie || mit a b gezogen werden, so verbinde c mit a durch eine g. L., halbire c a in e, ziehe durch e die L. b d, mache e d = e b und ziehe d c, so ist d c || a b.

Zus. 2. Durch Umkehrung entsteht folgender Satz: Halbiren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (Der Beweis dieses Satzes fließt unmittelbar eigentlich schon aus obigem Lehrsatz; doch ist er mit Hilfe des §. 48 und des §. 71 leicht zu liefern.)

§. 75. Lehrsatz.

Jede gerade Linie durch den Halbirungspunct der Diagonale eines Parallelogramms (durch den Mittelpunct des Parallelogramms) halbirt das Parallelogramm.

Beweis: Da in Fig. 77 a o = o c (Bed.) und

$$\begin{array}{l} \llcorner m = \llcorner p\ (\S.\ 30) \\ \llcorner n = \llcorner r\ (\S.\ 22) \end{array}$$

$$\triangle B \cong \triangle D\ (\S.\ 49)$$

Da nun $A + D = C + B$ (§. 70. Zus. 2), so ist auch $A + B = C + D$, weil $B = D$ und gleiche Größen für einander gesetzt werden können.

§. 76. Lehrsatz.

Die zwei Diagonalen eines Rechtecks sind einander gleich.

Beweis: Vergleiche die beiden △ a b d und a b c (Fig. 78)

ab = ab
ad = bc (Vor.)
∟(m + n) = ∟(p + o) (Vor.)

△ abd ≅ △ abc (§. 48)

---

bd = ac (§. 50. Zuſ. 3).

Zuſ. Da das Quadrat ein Rechteck von gleichen Seiten iſt, ſo gilt dieſer Lehrſatz natürlich auch vom Quadrat.

§. 77. Lehrſatz.

Die zwei Diagonalen im Rhombus durchſchneiden ſich unter rechten Winkeln und ſtehen alſo ſenkrecht auf einander.

Beweis: Wenn erwieſen wird, daß ∟ aeb = ∟ bec iſt, ſo läßt ſich die Richtigkeit dieſes Satzes leicht einſehen. Vergleiche demnach die △ abe und bce (Fig. 79)

ae = ec (§. 74)
be = be (I)
ab = bc (Bed.)

△ aeb ≅ △ bec (§. 50)

∟ r = ∟ s (§. 50. Zuſ. 3)

---

r = R
s = R } (§. 20. Zuſ. 5)

Zuſ. 1. Da das Quadrat als ein Rhombus mit lauter rechten ∟∟ betrachtet werden kann, ſo gilt dieſer Lehrſatz auch vom Quadrat.

Zuſ. 2. Daß in einem Rhombus und in einem Quadrate zwei ſich durchſchneidende Diagonalen die ∟∟ des Rhombus und des Quadrates halbiren, läßt ſich aus der Congruenz der △ leicht erweiſen.

Anmerk. 1. Zur Beſtimmung eines # reichen natürlich noch weniger Stücke hin, als zur Beſtimmung eines Vierecks im Allgemeinen. Jedes # iſt durch höchſtens 3 Stücke (zwei Seiten und den dazwiſchen liegenden ∟) vollſtändig beſtimmt. Doch ſind nur beim Rechtecke und beim Rhomboide dieſe 3 Stücke nothwendig; bei dem Rhombus genügt 1 Seite und 1 anliegender ∟ und (ſetzt man den R als gegeben voraus) beim Quadrat nur 1 und beim Rechteck 2 aneinander liegende Seiten.

Anmerk. 2. Da nach dem vorhergegangenen Lehrſatze die Diagonalen im Rhombus und im Quadrate unter RR ſich durchſchneiden, ſo ſind zur Beſtimmung eines Rhombus die beiden Diagonalen und zur Beſtimmung eines Quadrates 1 Diagonale vollkommen hinreichend.

C) Vom Trapeze.

§. 78. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel laufen, heißt ein Trapez (Fig. 80 abcd).

§. 79. Lehrsatz.

Wenn in einem Trapez a b c d (Fig. 80) durch den Halbirungspunct (e) einer der nicht parallelen Seiten eine gerade Linie parallel zu den Seiten gezogen wird, so 1) halbirt diese g. L. auch die andere nicht parallele Seite (b c in f) und ist 2) von der Summe der beiden parallelen Seiten die Hälfte. (Diese Verbindungslinie heißt die **mittlere Länge** des Trapezes.)

Beweis: 1) Verlängere d c und ziehe $gh \parallel ad$, so, daß g h die verlängerte Linie d c in h trifft; dann ist

$$\left.\begin{matrix} gf = ae \\ fh = ed \end{matrix}\right\}$$ (§. 73. Zus. a). Da aber $ae = ed$ (Vor.), so kann für a e auch e d gesetzt werden, und es ist also auch $gf = ed$. Da ferner $ed = fh$ ist, so ist auch $gf = fh$. Nun kann die Congruenz der beiden $\triangle$ g b f und h c f erwiesen werden; denn

$$\begin{array}{l} gf = fh \\ \llcorner fgb = \llcorner fhc \text{ (§. 30)} \\ \underline{\llcorner gfb = \llcorner hfc \text{ (§. 22)}} \\ \underline{\triangle gbf \cong \triangle hcf \text{ (§. 49)}} \end{array}$$

$bf = cf$. Folglich ist f der Halbirungspunct der Linie b c.

2) Es ist $ag = ef = dh$ nach §. 70. Aus der so eben bewiesenen Congruenz der beiden $\triangle$ folgt aber ferner, daß $gb = hc$ sei; denkt man sich nun das Stück h c von d h abgeschnitten und an a g angefügt, so ist d c und $ab = 2\ ef$; e f also $= \frac{dc + ab}{2}$.

Zus. 1. Durch Umkehrung des Satzes Nr. 1 entsteht folgender: Wenn die Halbirungspuncte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes durch eine g. L. verbunden werden, so ist diese den parallelen Seiten parallel.

Zus. 2. Da jedes # als eine Art von Trapez, in welchem auch die nicht parallelen Seiten parallel sind, gedacht werden kann, so gelten die vorhergehenden Sätze auch von jedem #. Sie können aber auch auf das $\triangle$ angewendet werden, wie im folgenden Lehrsatze gezeigt ist.

§. 80. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck a b c (Fig. 81) durch den Halbirungspunct d einer Seite eine gerade Linie parallel mit der zweiten Seite a b gezogen wird, so 1) halbirt sie die dritte Seite b c des $\triangle$ und ist 2) die Hälfte von der Seite des $\triangle$, mit welcher sie parallel läuft.

Beweis: 1) Ziehe $fe \parallel ad$; dann sind die $\triangle$ f b e und d e c congruent; denn $fe = ad$ (§. 73 a) und da $ad = dc$ (Bed.), so ist auch

$fe = dc$
$\angle efb = \angle cde$, weil $fb \parallel de$ } (Verf.)
$\angle bef = \angle ecd$, weil $fe \parallel dc$ }

$\triangle fbe \cong \triangle dec$, (§. 49) und folglich $be = ec$ und in e ist also der Halbirungspunct der L. b c.

2) Es ist $af = de$ (§. 73 a)
$fb = de$ (folgt aus der Congruenz der $\triangle$)
$af = bf$ (II) und de also $= \frac{ab}{2}$.

§. 81. Zusätze.

Zus. 1. Durch Umkehrung des Satzes Nr. 1 entsteht folgender: Wenn die Halbirungspuncte zweier Seiten eines $\triangle$ durch eine g. L. verbunden werden, so ist diese der dritten Seite parallel.

Zus. 2. Wenn Parallellinien (a b, c d, e f und g h Fig. 82) von einer andern, die Parallellinien schneidenden Linie (i k) gleiche Theile i n, n o, o k abschneiden, so theilen sie auch jede andere schneidende Linie in dieselbe Anzahl gleicher Theile.

Beweis: Es ist also vorausgesetzt, daß die Parallellinien gleichweit von einander entfernt sind und daß folglich $in = no = ok$ und es wird behauptet, daß auch $ip = pq = qm$. Betrachte, um dies zu beweisen, zuerst das $\triangle$ ioq; da $in = no$ (Bed.), so ist n der Halbirungspunct von i o, und da $np \parallel oq$, so ist nach §. 80 p auch der Halbirungspunct von i q, folglich $ip = pq$. Da ferner in dem Trapez n p m k der Punct o der Halbirungspunct von n k und $oq \parallel km$, so ist auch nach §. 79 q der Halbirungspunct von p m und also auch $pq = qm$; somit ist $ip = pq = qm$ und die L. i m in gleiche Theile getheilt. Daß $ir = rs = sh$ ist, kann ebenso bewiesen werden.

D) Aufgaben.

§. 82. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu errichten.

Aufl. Ist die gegebene L. a b (Fig. 72), so errichte an a eine senkrechte L. oder setze einen R an und mache $ad = ab$; nimm a b in den Zirkel, mache mit gleicher Oeffnung von b und d aus Kreuzbögen in c und ziehe c d und c b, so ist a b c d das verlangte Quadrat.

Beweis: $ab = ad = dc = bc$ (Verf.)
a b c d ist ein # (§. 71)
ferner ist $\angle o = R$ (Verf.)
$\angle p = \angle n = \angle m = R$ (§. 70. Zus. 1).

Da nun Seiten und ⊾ gleich sind, so ist das # a b c d ein Quadrat (§. 69 b).

Anmerk. In ganz ähnlicher Weise wird aus einer gegebenen g. L. und einem schiefen ∟ ein Rhombus — aus zwei gegebenen g. Ll. ein Rechteck — aus zwei gegebenen g. Ll. und einem schiefen ∟ ein Rhomboid construirt. Die Constructionen und Beweise sind sehr leicht und daher von dem Schüler selbst zu entwerfen und zu finden.

§. 83. Aufgabe.

Eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. 1. Ist i k (Fig. 83) die gegebene L., welche in etwa 3 gleiche Theile getheilt werden soll, so ziehe an den Endpunct i einen Winkel (am besten einen spitzigen) und trage auf die Linie i m beliebige drei gleiche Theile auf; ziehe m k und von q und p aus Linien || mit m k; diese treffen die gegebene L. in n und o; dann ist i n = n o = o k und also die L. i k in 3 gleiche Theile getheilt. Der Beweis fließt aus §. 81 Zus. 2. Betrachte nur in Fig. 82 die L. i k als gegeben und vergleiche Fig. 82 mit Fig. 83.

Aufl. 2. Soll (Fig. 84) die L. a b in 3 gleiche Theile getheilt werden, so errichte an beiden Endpuncten der L. a b nach verschiedenen Seiten hin gleiche (spitzige) Winkel, so daß ∟ c a b = ∟ a b d und trage auf a c drei gleiche beliebige Theile und dieselben Theile auch auf b d; ziehe f g und e h, so ist a i = i k = k b. Der Beweis stützt sich ebenfalls auf §. 81. Zus. 2. Durch die zweite Hilfslinie b d wird nur das Ziehen der Parallellinien c b, e h u. s. w. erleichtert.

Uebungsaufgaben.

51) Zeichne ein beliebiges Quadrat und dann ein anderes, welches einen dreifach größern Umfang hat, als das zuerst gezeichnete.

52) Ziehe eine Linie, betrachte sie als die Diagonale eines Quadrats und zeichne nun das Quadrat.

53) Ziehe eine beliebige Linie, betrachte sie als die Größe des Umfangs eines Quadrats und zeichne dann dieses Quadrat.

54) Zeichne drei Quadrate, von denen das zweite einen doppelt so großen Umfang, als das erste, und das dritte einen doppelt so großen Umfang, als das zweite hat.

55) Zeichne ein Quadrat, dessen Umfang nur den dritten Theil des Umfanges eines gegebenen Quadrats hat.

56) Zeichne ein Quadrat, dessen Umfang dem eines gegebenen △ gleich ist.

57) Zeichne auf die drei Seiten eines beliebigen gleichseitigen △ Quadrate.

58) Zeichne einen Rhombus, dessen Seite gegeben und dessen einer Winkel = 40° ist.

59) Zeichne einen Rhombus, von dem die beiden Diagonalen gegeben sind.

60) Zeichne einen Rhombus, dessen Umfang dem eines gegebenen △ gleich ist.

61) Zeichne ein Rechteck, von dem die längere Seite noch einmal so groß ist, als die kürzere.

62) Zeichne ein Rechteck, dessen Umfang dem eines gegebenen Quadrats gleich ist; doch soll die Grundlinie des Rechtecks viermal so groß sein, als die Höhe.

63) Zeichne ein Rechteck, von dem eine Diagonale und eine Seite gegeben sind.

64) Zeichne ein Parallelogramm, von welchem 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene ∟ gegeben sind.

65) Zeichne ein Quadrat, eine Raute, ein Rechteck und ein Rhomboid, deren Umfang einander gleich ist.

65) Zeichne ein Trapez, von welchem die beiden parallelen Seiten gegeben sind.

67) Zeichne ein Trapez, von welchem eine der beiden parallelen Seiten, eine der nicht parallelen Seiten und ein Winkel an der parallelen Seite gegeben sind.

68) Theile eine gegebene Linie in 17 gleiche Theile.

69) Theile eine gegebene Linie in $4\frac{1}{2}$ gleiche Theile.

70) Theile eine gegebene Linie in $3\frac{2}{3}$ gleiche Theile und ziehe dann eine Linie, welche $6\frac{1}{2}$ solcher Theile lang ist.

IX. Von den Vielecken.

A) Von den Vielecken im Allgemeinen.

§. 84. Erklärungen.

a) Vielecke heißen nach §. 37 alle diejenigen Figuren, deren Grenzen g. Ll. sind, und welche also 3 oder mehr als 3 Seiten haben. Da von dem regulären Dreieck und Viereck (Quadrat) schon früher die Rede war, so sind hier blos solche Vielecke gemeint, welche mehr als 4 Seiten haben.

b) Jeder Winkel am Umfange eines Vielecks, der also von 2 Seiten desselben gebildet wird, heißt Vielecks- oder Polygonwinkel.

§. 85. Lehrsatz.

In einem Vieleck von n Seiten kann man immer n—3 Diagonalen ziehen, wenn das Vieleck in die kleinste Zahl von Dreiecken getheilt werden soll so daß die Diagonalen sich nicht durchschneiden.

Beweis: In einem Dreieck ist keine Diagonale möglich; denn zugegeben, daß sie möglich wäre, so würde sie doch nur mit einer Seite des Dreiecks zusammenfallen und also nach §. 37 c keine Diagonale sein; in einem Viereck ist zwischen je zwei Ecken nur 1 Linie möglich, die nicht mit einer Seite zusammenfällt; in einem Fünfeck können nur 2 Diagonalen gezogen werden u. s. f., also können immer 3 Diagonalen weniger gezogen werden, als das Vieleck Seiten enthält; in einem n Eck also n—3 Diagonalen.

Zusatz. Wird ein Vieleck durch Diagonalen in $\triangle$ getheilt, so erhält man immer 2 $\triangle$ weniger, als die Figur Seiten hat; in einem Dreieck erhält man $3-2=1$, (d. h. außer dem gegebenen $\triangle$ kein anderes, weil in einem $\triangle$ keine Diagonalen möglich sind), in einem Viereck $4-2=2$, in einem Fünfeck $5-2=3\,\triangle$, in einem n Eck also $n-2\,\triangle$.

§. 86. Aufgabe.

In einem n Eck die Gesammtsumme aller Winkelgrade zu erhalten.

1. Aufl. Theile das Vieleck in $\triangle$, was $n-2\,\triangle$ gibt (§. 85. Zus.); dann ist die Gesammtsumme aller Winkelgrade $=(n-2)\times 2$ R.

Beweis: In jedem △ ist die Gesammtsumme = 2 R = 180° (§. 42); in einem n Eck also (n — 2) × 2 R.

Zus. In einem △ ist sonach die Summe der Winkelgrade = (3 — 2) × 2 R = 2 R; in einem Viereck = (4 — 2) × 2 R = 4 R; in einem Fünfeck = (5 — 2) × 2 R = 6 R.

2. Aufl. Nimm irgend einen beliebigen Punct innerhalb der Seiten des Vielecks an und ziehe von diesem Puncte g. Ll. in die Winkel des Vielecks, wodurch so viele △ entstehen, als das Vieleck Seiten hat, in einem n Eck also n △; dann ist die Summe aller Polygonwinkel = (n × 180°) — 360° oder (n × 2 R) — 4 R.

Beweis: In den n △ sind alle Winkel = n × 2 R (§. 42). Alle ∠ aber um den beliebig angenommenen Punct, welche = 4 R (§. 20. Zus. 8) und nicht zu den Polygonwinkeln gehören, müssen abgezogen werden; folglich ist die wahre Summe (n × 2 R) — 4 R.

B) Von den regelmäßigen Vielecken.

§. 87. Lehrsatz.

In jedem regelmäßigen Vieleck ist ein Punct, welcher a) von allen Seiten und b) von allen Winkeln gleichweit absteht.

Beweis: Um zuerst diesen Punct zu finden, so ziehe (Fig. 85) von den Halbirungspuncten zweier an einander liegenden Seiten, (also von b und d) Perpendikel so, daß sie sich in o durchschneiden; dieser Durchschnittspunct ist der Mittelpunct des Vielecks. Ziehe ferner o c, o d und o e; dann ist

$$\begin{array}{c} od = od \\ cb = cd \text{ (Bed.)} \\ \hline \triangle cbo \cong \triangle cdo \text{ (§. 52)} \end{array}$$

Da nun die beiden △ congruent sind, so ist auch o b = o d und der Punct o ist von den zwei Seiten a c und c e gleichweit entfernt. In ähnlicher Weise kann der gleiche Abstand auch von den übrigen Seiten nachgewiesen werden.

Um den gleichen Abstand von den Winkeln zu beweisen, beweiset man die Congruenz der △ a b o, c b o, c d o und e d o, was nach §. 48 leicht ist, weil diese △ nach der Verfert. sämmtlich rechtwinklig sind und die Congruenz der △ c b o und c d o, bereits nachgewiesen ist. Aus der Congruenz der △ folgt aber auch, daß a o = c o = e o ist, oder, was dasselbe ist, daß der Punct o von den Winkeln a, c, e gleichweit entfernt ist. In ähnlicher Weise läßt sich dasselbe auch von den übrigen Winkelpuncten nachweisen.

Zus. Aus der Congruenz der △ folgt auch, daß der Vieleckswinkel c in zwei gleiche Theile getheilt ist, und da dies, wenn der Beweis fortge-

setzt wird, bei jedem Winkel der Fall ist, und die Theilungslinie jedesmal durch den Mittelpunct geht, so findet man also auch noch den Mittelpunct, wenn man zwei, einander nicht gegenüberliegende Winkel eines regulären Vielecks halbirt; der Durchschnittspunct der verlängerten Halbirungslinien ist der Mittelpunct.

§. 88. Erklärung.

Zieht man von dem Centrum g. Ll. in die Scheitel der Polygonwinkel, so entstehen um das Centrum so viele Winkel, als die Figur Seiten hat; diese Winkel heißen **Centriwinkel** (vergl. §. 23).

§. 89. Lehrsatz.

Die Centriwinkel eines regulären Vielecks sind einander gleich.

Beweis: (Fig. 85) $\triangle aoc \cong \triangle coe \cong \triangle eof$ u. s. w. (§. 50)

$\angle aoc = \angle coe = \angle eof$ u. s. w. (§. 50. Zus. 3).

Zus. 1. Die $\triangle$, welche in einem regulären Vielecke dadurch entstehen, daß man vom Centrum Ll. in die Scheitel der Polygonwinkel zieht, sind alle einander gleich.

Zus. 2. Daraus folgt, daß in zwei regulären Vielecken von gleicher Seitenzahl auch die Centriwinkel gleich sind.

§. 90. Aufgabe.

Die Größe eines Centriwinkels in einem regulären Vieleck von n Seiten zu erhalten.

Aufl. Die Größe eines Centriwinkels ist $= \frac{360^0}{n}$.

Beweis: Ziehe vom Centrum aus g. L. in die Scheitel der Polygonwinkel, so entstehen n Centriwinkel, welche alle zusammengenommen $= 360^0$ sind (§. 20. Zus. 8); jeder einzelne ist also der nte Theil von $360^0 = \frac{360^0}{n}$

§. 91. Aufgabe.

Die Größe des Polygonwinkels in einem regulären Vieleck von n Seiten zu erhalten.

Aufl. Da die Gesammtsumme aller Polygonwinkel $= (n-2) \times 2R$ (§. 86), so ist die Größe jedes einzelnen $\angle = \frac{(n-2) \times 2R}{n} = \frac{n-2}{n} \times 2R$.

Beweis: Die Gesammtsumme aller Polygonwinkel ist $= (n-2) \times 2R$; da nun aber so viele gleiche $\angle\angle$ vorhanden sind, als Seiten, so ist jeder einzelne $\angle$ der nte Theil der Gesammtsumme, welche somit durch n dividirt werden muß.

C) Aufgaben: Zeichnen regelmäßiger Vielecke.

Anmerk. Da das Zeichnen des regelmäßigen △ (gleichseitigen △) und des regelmäßigen Vierecks (des Quadrates) schon in den §§. 55 und 78 gelehrt worden ist, so sollen hier nur noch einige regelmäßige Vielecke vom Fünfeck an, größtentheils auf mechanische Weise gezeichnet werden. Zu bemerken ist jedoch, daß die in den §§. 94 und 96 gegebenen Auflösungen Vielecke zeichnen lehren, die nur als annähernd richtig zu betrachten sind. Obwohl hier einige Vielecke in einen Kreis gezeichnet werden, so unterscheiden sich diese Aufgaben doch von den im Abschnitte XII vorkommenden; denn hier ist die Größe einer Seite des Vielecks gegeben, während im Abschnitte XII die Größe des Kreises gegeben ist, in welchen das Vieleck gezeichnet werden soll. Bei den §§. 93 und 99 mußte auf einige spätere §§. hingewiesen werden, was sich nicht wohl vermeiden ließ.

§. 92. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie a b ein reguläres Fünfeck (ohne Transporteur) zu verfertigen.

1. Aufl. Errichte (Fig. 86) den Perpendikel b d = a b, halbire a b in c, verlängere a b nach e und ziehe von c aus den Bogen d e, mache mit a e von a und b Kreuzbögen in f und mit a b von f und a Kreuzbögen in g und von f und b Kreuzbögen in h und ziehe a g, g f, f h, h b.

2. Aufl. Errichte (Fig. 87) auf der gegebenen L. a b den Perpendikel b d = a b, ziehe von dem Halbirungspuncte c mit dem Halbmesser c b den Halbkreis d e b; dann ist a e = der L. a e der ersten Auflösung. Verfahre nun ganz nach der 1. Auflösung.

§. 93. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie a b ein reguläres Sechseck zu verfertigen.

1. Aufl. Errichte (Fig. 88) über a b das gleichseitige △ a b c und ziehe aus c mit c a als Halbmesser eine Kreislinie; in dieser läßt sich a b sechsmal herumtragen. (Der Beweis ergibt sich aus einem spätern §, nämlich aus §. 105.)

2. Aufl. Verlängere (Fig. 89) a b nach d und c, mache a d = b c = a b; errichte auf d c das gleichseitige △ d c g, theile die Seiten d g uud c g in 3 gleiche Theile und ziehe a e, e f, f h, h i, i b.

Der Beweis ist leicht zu führen; denn die abgeschnittenen kleineren △ sind gleichseitig und jede Seite ist = a b, der gegebenen Seite.

§. 94. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein reguläres Siebeneck zu verfertigen.

Aufl. Zeichne zuerst ein gleichseitiges △ c d e (Fig. 90), von dem eine Seite > als die gegebene Linie a b, (Fig. 91) fälle von e einen Perpendikel, mache e f = a b, ziehe durch f die L. g || h c d, so ist g h = dem Halbmesser einer Kreislinie, in welcher sich a b siebenmal herumtragen läßt. Errichte nun aus dem Halbirungspuncte m der L. a b (Fig. 91) einen Perpendikel und mache a o = g h, so ist o das Centrum des zu ziehenden Kreises.

§. 95. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie a b ein reguläres Achteck zu verfertigen.

1. Aufl. Ziehe vom Halbirungspuncte der L. a b (Fig. 92) einen Perpendikel nach d und mache diesen Perpendikel = der halben Linie a b; ziehe dann d f und d i und mache a e = b h = a b und e f = h i = d a. Vollende nun das □ d f k i und trage in ähnlicher Weise die übrigen Linien auf.

Der Beweis ist leicht zu führen; denn die abgeschnittenen kleinen △ sind nach §. 48 congruent und die Gleichheit der 8 Seiten ist also leicht zu erweisen.

2. Aufl. Errichte (Fig. 93) aus dem Halbirungspuncte c den Perpendikel c d = c a und d e = d a und beschreibe von e als Centrum mit e a als Halbmesser einen Kreis, so läßt sich in demselben a b achtmal herumtragen.

§. 96. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie a b ein reguläres Neuneck zu verfertigen.

Aufl. Errichte aus dem Halbirungspuncte c (Fig. 94) den Perpendikel c e und mache a d = a b und d e = a c und beschreibe aus e als dem Centrum mit e a als Halbmesser einen Kreis, so läßt sich in diesem a b neunmal herumtragen.

§. 97. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie a b ein reguläres Zehneck zu verfertigen.

Aufl. Errichte aus b (Fig. 95) den Perpendikel b f = a b, beschreibe aus dem Halbirungspuncte c mit c b als Halbmesser den Halbkreis f d b, ziehe durch c die L. a d, mache aus a und b mit a d Kreuzbögen in e und beschreibe aus e als dem Centrum mit e a als Halbmesser eine Kreislinie, so läßt sich in derselben a b zehnmal herumtragen.

§. 98. Aufgabe.

Irgend ein reguläres Vieleck mit Hilfe des Transporteurs zu zeichnen.

1. Aufl. Setze den Polygonwinkel (beim Fünfeck $=108^0$) an eine g. L. a b (Fig. 96) bei a an und mache a e $=$ a b; setze dann denselben ∟ a n e an und mache e d $=$ a b; setze ihn an d und mache d c $=$ a b; dann an c und ziehe c b.

Beweis: Wenn man an b auch noch den Winkel (108^0) ansetzt, so fließt der Beweis aus §. 37 e. Das Ansetzen des ∟ an c und b ist aber überflüssig, weil die Puncte c und b ja schon bestimmt sind.

2. Aufl. Setze (Fig. 96) an a und an b den halben Polygonwinkel an, so daß (bei einem Fünfeck) ∟ f a b $=$ ∟ f b a $=45^0$ und die Schenkel a f und b f in f sich schneiden; f ist dann das Centrum und f a der Halbmesser zu einem Kreise, in welchem sich die gegebene L. a b so oft mal herumtragen läßt, als das Vieleck Seiten haben soll (hier 5 mal).

3. Aufl. Ziehe (Fig. 96) eine beliebige L. a f und setze an f den Centriwinkel des verlangten Vielecks an (beim Fünfeck $=72^0$); beschreibe nun von f als Centrum mit beliebiger Oeffnung des Zirkels eine Kreislinie, welche die beiden Schenkel des Centriwinkels in a und b durchschneiden, so läßt sich die L. a b so oft im Kreise herumtragen, als das Vieleck Seiten haben soll (hier 5 mal) vergl. §. 124.)

Die Beweise dieser beiden letzteren Auflösungen fließen aus den §§. 87—91. Denn da a f b der Centriwinkel des verlangten Vielecks ist, so ist a b der dazu gehörige Bogen; beim Fünfecke also $^1/_5$ der Kreislinie. Folglich muß sich dieser Bogen auch 5 mal im Kreise herumtragen lassen u. s. w.

§. 99. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie a c ein reguläres Vieleck zu verfertigen, welches eine beliebige Seitenzahl hat.

Aufl. Ziehe (Fig. 97) aus a den Perpendikel a c $=$ a b und den Bogen e c b, theile b c in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten erhalten soll (hier in 8), mache c e $=$ c 4, (d. h. $=$ dem Bogen von c an bis zu dem jedesmaligen vierten Theilungspunct), beschreibe nun nach §. 123. Aufl. 2. Zus. durch die 3 Puncte e, a, b eine Kreislinie, so läßt sich in derselben a b so oft herumtragen, als das Vieleck Seiten erhalten soll (hier 8 mal) (vergl. §. 124.)

Zus. Sollen blos die Vielecke: Sechseck rc. bis Zwölfeck zu einer gegebenen L. a b gezeichnet werden, so läßt sich dies auf folgende Weise ausführen: Ist (Fig. 98) a b die gegebene L., so errichte aus dem Halbirungspuncte i einen Perpendikel und ziehe mit a b als Halbmesser aus a und b die Bögen a 6 und b 6, theile a 6 in sechs gleiche Theile, ziehe von 6 als dem Centrum die Bögen c 7, d 8 u. s. w. In dem Kreise,

dessen Centrum 6 und dessen Radius 6 a ist, läßt sich a b sechsmal herumtragen; in dem Kreise, dessen Centrum 7 und dessen Radius 7 a ist, läßt sich a b siebenmal herumtragen u. s. w. (vergl. §. 124).

§. 100. Aufgabe.

Ein reguläres Vieleck von beliebiger Seitenzahl ohne vorher bestimmte Größe einer Seite zu zeichnen.

Aufl. Ziehe (Fig. 99) eine beliebige g. L. a b, theile sie in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten erhalten soll (hier 7), beschreibe dann mit einem Halbmesser $= \frac{1}{2}$ a b aus dem Halbirungspuncte c eine Kreislinie und mit a b von a und b aus Kreuzbögen in d und e. Von d und e ziehe durch die Theilungspuncte der L. a b, welche mit geraden Ziffern (2, 4, 6) bezeichnet sind, g. Ll., welche die Peripherie in f, g, h, i, k, m berühren und vereinige diese Berührungspuncte durch die g. Ll. a f, f g, g h u. s. w.

X. Vom Kreise.

§. 101. Erklärungen.

a) Jede Gerade, welche die Kreislinie in 2 Puncten schneidet, heißt Secante (Fig. 100 i k). Sie liegt also theils außerhalb, theils innerhalb der Kreislinie. Der Theil, welcher innerhalb liegt, ist eine Sehne (Fig. 100 a b).

b) Jede Gerade, welche mit der Kreislinie nur in einem einzigen Puncte zusammentrifft, wenn man sie auch auf beiden Seiten unendlich verlängern würde, heißt Tangente oder Berührungslinie (Fig. 100 c d).

c) Der Theil des Kreises, welcher zwischen zwei Radien und dem dazu gehörigen Bogen liegt, heißt Sector oder Kreisausschnitt. (Fig. 100 a g f.)

d) Der Theil des Kreises, welcher zwischen einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen liegt, heißt Segment oder Kreisabschnitt (Fig. 100 a b e).

e) Derjenige Winkel, dessen Schenkel zwei Sehnen sind, heißt Peripheriewinkel (Fig. 100 a h f). Sein Scheitel liegt also in der Peripherie.

f) Derjenige Winkel, dessen Schenkel zwei Radien sind, heißt Centriwinkel (Fig. 100 a g f). Sein Scheitel liegt also in dem Centrum (vergl. §. 23).

g) Der Theil des Kreises, welcher von der halben Peripherie und dem dazu gehörigen Durchmesser begrenzt ist, heißt Halbkreis.

h) Der vierte Theil des Kreises, welcher also den vierten Theil der Kreislinie und zwei dazu gehörige Halbmesser zur Grenze hat, heißt Quadrant. Die beiden Halbmesser müssen einen Winkel bilden, welcher $= \frac{4 R}{4}$ $= R$ ist (§. 20. Zus. 8 u. §. 23).

i) Der sechste Theil des Kreises, welcher den sechsten Theil der Kreislinie und zwei dazu gehörige Halbmesser zur Grenze hat, heißt Sextant.

A) Von der Sehne.

§. 102. Lehrsatz.

Der vom Mittelpuncte (Fig. 101) gefällte Perpendikel c d (c e) halbirt die Sehne a b und den Bogen a b.

Beweis: Wenn die Endpuncte der Sehne mit dem Mittelpuncte verbunden werden, so fließt der Beweis ganz aus §. 53.

Zus. 1. Jeder Durchmesser, welcher die Sehne senkrecht durchschneidet, halbirt die Sehne und den Bogen.

Zus. 2. Wenn man vom Mittelpuncte aus durch eine g. L. eine Sehne halbirt, so steht die g. L. auf der Sehne senkrecht und halbirt auch den Centriwinkel, dessen Schenkel auf den Endpuncten der Sehne aufstehen ($\llcorner m = \llcorner n$).

Zus. 3. Ein Perpendikel, welcher aus dem Halbirungspuncte (d) einer Sehne errichtet wird, geht, hinreichend verlängert, durch den Mittelpunct. Man findet also den Mittelpunct eines Kreises, wenn man aus dem Halbirungspuncte zweier nicht parallellaufenden Sehnen Perpendikel errichtet.

Zus. 4. Die vom Mittelpuncte auf den Halbirungspunct einer Sehne gezogene Linie bestimmt die Entfernung der Sehne vom Mittelpunct, weil zwischen c und d (Fig. 101) nur 1 g. L. möglich ist.

Zus. 5. Die Aufgabe, einen Bogen zu halbiren, ist in Folge dieses Lehrsatzes leicht zu lösen. Vereinige nur (Fig. 102) die Endpuncte des Bogens durch die Sehne a b und errichte aus dem Halbirungspuncte c den Perpendikel c d, so ist a d = d b. Durch fortgesetzte Theilung kann der Bogen in 4, in 8 ꝛc. Theile getheilt werden.

§. 103. Lehrsatz.

Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunct.

Beweis: In Fig. 103 sind a b und c d die gleichen Sehnen; ziehe nun aus dem Mittelpuncte e auf den Halbirungspunct jeder Sehne die Ll. e f und e g, so bestimmen diese die Entfernung der Sehne (§. 102. Zus. 4), und es ist also blos zu beweisen, daß diese Ll. gleich sind. Es ist aber

$$\begin{array}{l} fa = gc \text{ (Bed.)} \\ ea = ec \text{ (§. 14. Zus. 1)} \\ \hline \end{array}$$

$\triangle fae \cong \triangle gce$ (§. 52); folglich ist auch $ef = eg$ (§. 50. Zus. 3) und die Sehnen haben also gleichen Abstand vom Mittelpunct.

Zus. Durch Umkehrung dieses Lehrsatzes ergibt sich der Satz: Zwei Sehnen sind einander gleich, wenn sie gleichen Abstand vom Mittelpuncte haben.

§. 104. Lehrsatz.

In demselben Kreise haben gleiche Sehnen auch gleiche Bogen.

Beweis: Sind die Sehnen ab und de (Fig. 104) gleich, so ziehe an die Endpuncte der Sehnen Radien; dann ist

$$\left.\begin{array}{l} ac = dc \\ bc = ec \end{array}\right\} \text{ (als Radien)}$$
$$\begin{array}{l} ab = de \text{ (Bed.)} \\ \hline \end{array}$$

$\triangle abc \cong \triangle dec$ (§. 50); folglich $\angle m = \angle n$ und da zu gleichen Centriwinkeln auch gleiche Bogen gehören (§. 24), so ist auch

Bogen ab = Bogen de.

Zus. Durch Umkehrung dieses Satzes gelangt man zu folgendem: Zu gleichen Bogen gehören gleiche Sehnen (Beweis nach §. 48).

§. 105. Lehrsatz.

Die Sehne des Sextanten ist gleich dem Radius.

Beweis: Da nach der Bedingung (Fig. 105)

$$adb = \tfrac{1}{6} \text{ der Peripherie} = \frac{360^0}{6} = 60^0 \text{ (§. 101 i),}$$

so ist $\angle o = 60^0$

Da nun $\angle\angle m + n = (180 - 60) = 120^0$ (§. 42)

und $ac = bc$ (§. 14. Zus. 1)

$\angle m = \angle n$ (§. 45)

$\angle m = 60^0$ und $\angle n = 60^0$

Da nun jeder $\angle$ des $\triangle acb = 60^0$, so ist das $\triangle$ ein gleichseitiges (§. 46); folglich ist auch $ab = ac$.

Zus. 1. Da der ganze Kreis aus 6 Sextanten besteht und jede Sehne eines Sextanten = dem Radius ist, so läßt sich also in einem Kreise der Radius 6mal als Sehne an der Peripherie herumtragen.

Zus. 2. In einem Halbkreise läßt sich der Radius 3mal herumtragen. Darauf stützt sich eine andere Auflösung der Aufgabe §. 62. Ist nämlich (Fig. 106) ab die gegebene g. L. und soll an b ein Perpendikel errichtet werden, so setze den Zirkel in b, ziehe einen großen Bogen gd ec und trage den Radius bg von g nach d und von d nach e. Hierauf

mache von d und e mit gleicher Oeffnung des Zirkels Kreuzbögen in f und ziehe f b, so ist diese Linie senkrecht auf a b.

Beweis: g d e c ist ein Halbkreis; g d $= \frac{1}{6}$ und d e auch $= \frac{1}{6}$ der Peripherie; da ferner d e in i halbirt wurde, so ist der Bogen g i $= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ der Peripherie, folglich nach §. 101 h der ∟ a b f = R und also f b senkrecht auf a b.

Zus. 3. Wenn der Radius 6mal im Kreise herumgetragen wird, so ist jeder Bogen = 60°, folglich auch der dazu gehörige Centriwinkel = 60°. Es läßt sich also mit dem Zirkel ein ∟ von 60° zeichnen, wenn man (Fig. 107) aus a der gegebenen Linie a b einen Kriegsbogen zieht und denselben von c aus mit dem Radius in d schneidet; dann ist ∟ d a c = 60°. Durch weitere Theilung des Bogens d c lassen sich noch die ∟∟ von 30°, 15°, 45°, auch die von 10°, 20°, 30°, 40°, 50° zeichnen.

B) Von der Tangente.

§. 106. Lehrsatz.

Jede Linie (c d Fig. 108), welche auf dem Endpuncte (b) eines Radius senkrecht steht, ist eine Tangente.

Beweis: Da die Tangente (§. 101 b) nur einen Punct mit der Kreislinie gemein haben darf, so ist der Beweis dieses Satzes geliefert, wenn bewiesen wird, daß jeder Punct der Tangente mit Ausnahme des Punctes b außerhalb der Kreislinie liegt. Ziehe demnach an den beliebigen Punct e die L. a e. Nun ist △ a b e ein rechtwinkliges (Bed.); in diesem ist aber die Hypotenuse größer, als eine Kathete; folglich ist a e > a b und der Punct e liegt also außerhalb des Kreises. Da nun dieses von jedem Puncte der L. c d erwiesen werden kann, (mit Ausnahme des Punctes b), so ist c d eine Tangente.

Zus. 1. Aus dem vorhergehenden Lehrsatz folgt durch Umkehrung der Satz: Der Radius, welcher den Berührungspunct einer Tangente trifft, steht auf der Tangente senkrecht.

Zus. 2. Ein Perpendikel aus dem Berührungspuncte einer Tangente geht, gehörig verlängert, durch den Mittelpunct des Kreises.

§. 107. Lehrsatz.

Zwei Tangenten (a b u. a d Fig. 109), welche von einem Puncte (a) außerhalb des Kreises gezogen werden, sind gleichlang, und die Linie, welche den Punct a mit dem Mittelpunct verbindet, halbirt den Winkel b a d.

Beweis: Ziehe die Radien c b und c d; dann ist ∟ a b c = R und ∟ a d c = R (§. 106. Zus. 1), und es ist ferner

$b c = d c$ (als Radien)
$a c = a c$ (als gemeinschaftl. Hypotenuse)
$\triangle a b c \cong \triangle a d c$ (§. 52)
$a b = a d$
und $\angle o = \angle p$ (§. 50. Zus. 3).

Zus. Daraus folgt ferner, daß die L., welche den Winkel halbirt, den zwei Tangenten bilden, durch den Mittelpunct gehe. Man findet also den Mittelpunct eines Kreises, wenn von zwei mit dem Mittelpunct nicht in einer geraden Linie liegenden Puncten außerhalb des Kreises je zwei Tangenten gezogen werden und der Winkel, den sie bilden, halbirt wird, und wenn die Halbirungslinien so verlängert werden, bis sie sich durchschneiden. Der Durchschnittspunct ist der Mittelpunct des Kreises.

C) Vom Peripherie- und vom Centriwinkel.

§. 108. Lehrsatz.

Der Peripheriewinkel ist nur halb so groß, als der Centriwinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht, und der Centriwinkel ist also noch einmal so groß, als der Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen steht.

Bedingung (Fig. 110. 111. 112).
Peripherie- und Centriwinkel haben gleichen Bogen (a d)

Behauptung:
$\angle a b d = \frac{1}{2} \angle a c d$
$\angle a c d = 2 \angle a b d$

Es sind drei Fälle möglich:

1. Fall: Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels mit einem Schenkel des Centriwinkels zusammenfällt (Fig. 110).

Beweis: $\angle o = \angle n + m$ (§. 44)
$\angle n = \angle m$ (§. 45)
$\angle o = 2 \angle m$
oder $\angle m = \frac{1}{2} \angle o$, d. h. $\angle a b d = \frac{1}{2} \angle a c d$ oder $\angle a c d = 2 \angle a b d$.

2. Fall: Wenn der Peripheriewinkel den Centriwinkel mit seinen Schenkeln einschließt (Fig. 111).

Beweis: Ziehe von der Spitze des Peripheriewinkels (b) eine g. L. durch das Centrum (c) bis an die Peripherie; dann ist
$\angle m = \frac{1}{2} \angle o$ (§. 108. 1. Fall)
$\angle n = \frac{1}{2} \angle p$ (desgl.)
$\angle m + n = \frac{1}{2} \angle o + \frac{1}{2} \angle p$ (IV) oder $\angle a b d = \frac{1}{2} \angle a c d$ und $\angle a c d = 2 \angle a b d$.

3. Fall: Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels einen Schenkel des Centriwinkels durchschneidet (Fig. 112).

Beweis: Ziehe von der Spitze des Peripheriewinkels (b) eine g. L. durch das Centrum (c) bis an die Peripherie; dann ist

$$\angle\angle\, m + n = \tfrac{1}{2}\angle\angle\, (o + p) \text{ (§. 108. 1. Fall)}$$
$$\underline{\angle\, n = \tfrac{1}{2}\angle\, p \text{ (desgl.)}}$$
$$\angle\, m = \tfrac{1}{2}\angle\, o \text{ (V) oder } \angle\, abd = \tfrac{1}{2}\angle\, acd$$

und $\angle\, acd = 2\angle\, abd$.

Zus. 1. Die Größe eines Centriwinkels wird durch den Bogen bestimmt, auf dem seine Schenkel stehen. Gleiche Centriwinkel stehen auf gleichen Bögen (vergl. §. 24).

Zus. 2. Die Größe eines Peripheriewinkels wird also durch den halben Bogen gemessen, auf dem seine Schenkel stehen. Gleiche Peripheriewinkel stehen auf gleichen Bögen.

Zus. 3. Zieht man (Fig. 111) die Sehne a d, so können die Zusätze 1 und 2 auch so ausgedrückt werden: Zu gleichen Centri- und gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Sehnen und umgekehrt (vgl. §. 24).

Zus. 4. Daraus folgt aber, daß zu gleichen Sehnen auch gleiche Bögen, gleiche Abschnitte und zu gleichen Bögen auch gleiche Ausschnitte gehören (vergl. §. 24).

Zus. 5. Der Peripheriewinkel acb (Fig. 113), der auf einem Halbkreis steht, ist ein R (Zus. 2); folglich sind alle Winkel, deren Schenkel mit den Endpuncten eines Durchmessers zusammenfallen und deren Scheitel in der Peripherie liegen, einander gleich, weil sie alle RR sind (Fig. 114).

Zus. 6. Die Richtigkeit eines Winkeldreiecks (oder eines Winkelhakens) kann also erforscht werden, wenn man es so in einen Halbkreis legt, daß (Fig. 114) zwei Seiten a c und c b mit den Endpuncten a und b des Durchmessers zusammenfallen. Liegt dann die Spitze c des R in der Peripherie, so ist $\angle\, acb = R$ und also das Winkeldreieck richtig.

Zus. 7. Auch kann man (Fig. 115) von einem Puncte c, welcher über einer g. L. a b liegt, noch auf folgende Art einen Perpendikel ziehen, wenn man die beliebige L. c d zieht, in e halbirt und aus e mit e c als Halbmesser den Halbkreis fertigt; c f ist dann der Perpendikel.

Zus. 8. Soll ein gleichschenklig rechtwinkliges △ construirt werden, und es ist blos die Länge der Hypotenuse gegeben, so mache (Fig. 116) a b = der gegebenen Hypotenuse; errichte aus dem Halbirungspuncte d den Perpendikel d c; ziehe mit d a als Halbmesser aus d den Halbkreis a c b und die Linien a c und b c, so ist $\angle\, acb = R$ und da a c = b c das △ a c b ein gleichschenklig rechtwinkliges.

Zus. 9. Wenn zwei Sehnen parallel laufen, so sind die zwischen ihnen liegenden Bogen gleich; denn wenn (Fig. 117) a b || c d ist und a d gezogen wird, so ist $\angle\, m = \angle\, n$ (§. 30), und da sie zugleich auch Peripheriewinkel sind, so ist auch der Bogen a c = b d (Zus. 2).

Zus. 10. Der umgekehrte Satz: Wenn zwei Sehnen von einem Kreise gleiche Bogen abschneiden, so sind die Sehnen parallel, ist leicht zu beweisen, denn wenn a d gezogen wird, so ist ∟ n = ∟ m, weil a c = b d und also ist auch a b || c d (§. 30).

D) Aufgaben.

§. 109. Aufgabe.

Eine gegebene Sehne A von bestimmter Größe mit einer andern Sehne parallel zu ziehen.

Aufl. Die gegebene Sehne sei A und die im Kreise bereits gezogene a b (Fig. 118). Halbire a b in c; mache c d = $\frac{1}{2}$ A und c e = $\frac{1}{2}$ A, so daß d e = A; errichte aus d und e Perpendikel, welche die Peripherie in f und g treffen, so ist f g = A und || a b.

Beweis: Errichte aus c den Perpendikel c i und ziehe d g und e f; dann ist

d c = c e (Verf.)
c i = c i (I)
∟ y = z (Verf. = R)
△ d i c ≌ △ e i c (§. 48)
d i = e i (§. 50. Zus. 3)
∟ n = ∟ o

Ferner ist d i = e i
∟ m = ∟ p; denn ∟ (m + n) = ∟ (p + o) = R
m = p (V)
∟ q = ∟ r (§. 22)
△ d i f ≌ △ e i g (§. 49)
d f = e g (§. 50. Zus. 3)
f g || d e (§. 25) und da auch f d || g e (§. 32. Zus. 3)
f g = d e = A (§. 73).

§. 110. Aufgabe.

Eine Tangente zu ziehen.

Aufl. Soll an dem Punct b (Fig. 108) eine Tangente errichtet werden, so ziehe den Radius b a und errichte aus b den Perpendikel c b (c d), so ist er die Tangente.

Beweis: er fließt ganz aus §. 106.

§. 111. Aufgabe.

Von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punct a (Fig. 119) eine Tangente zu ziehen.

Aufl. Ziehe von a nach dem Mittelpuncte e eine g. L. und an d nach §. 110 die Tangente c d; mache nun e c = e a; ziehe e c und durch f die Linie a b, so ist diese die Tangente.

Beweis: ed = ef (§. 14. Zus. 1)
ec = ea (Vers.)
∟ced = ∟aef, d. h. ∟o = ∟o

$\triangle$ edc $\cong$ $\triangle$ efa (§. 48)

∟cde = ∟afe (§. 50. Zus. 3)

Da aber ∟cde = R (§. 19 a und §. 106. Zus. 1)

∟afe = R, folglich af senkrecht auf ef und also eine Tangente (§. 106. Zus. 1).

§. 112. Aufgabe.

Den Punct genau zu bestimmen, in welchem eine Tangente die Peripherie berührt.

Aufl. Verbinde (Fig. 120) einen Punct der Tangente (a) mit dem Mittelpuncte (c) und errichte über der L. ac einen Halbkreis, so geht dieser bei d durch den Berührungspunct.

Beweis: ∟cba = R (§. 108. Zus. 5): cb ist also ein Radius, der senkrecht auf ba steht; folglich berührt die L. ad die Peripherie blos in dem Puncte b (§. 106. Zus. 1).

Uebungsaufgaben.

71) Ziehe in einem Kreise drei gleiche Sehnen.

72) Ziehe in einem Kreise 4 gleiche Sehnen, von denen je zwei || laufen.

73) Ziehe in einem gegebenen Kreise drei Sehnen, die zu Bogen gehören, die 30°, 45° und 90° groß sind.

74) Bezeichne durch Radien in einem gegebenen Kreise mittelst des Zirkels Centriwinkel von 30°, 15°, 10°, 45°, 50°.

75) Theile eine Kreislinie in 3 gleiche Theile und ziehe durch jeden Theilungspunct eine Tangente so lang, daß sie sich durchschneiden.

76) Ziehe in einem Kreise zwei Durchmesser, die sich senkrecht durchschneiden, und ziehe durch die Endpuncte der Durchmesser Tangenten, bis sich je zwei durchschneiden.

77) Bestimme in einer Kreislinie 3 Puncte und ziehe durch sie Tangenten, die sich berühren.

78) Suche den Mittelpunct eines gegebenen Kreises nach §. 107. Zus.

79) Zeichne ein gleichschenklig rechtwinkliges $\triangle$, von dem blos die Hypotenuse gegeben ist.

80) Ziehe zwei gleiche nicht parallellaufende g. Ll., die sich in einem Punct treffen, betrachte sie als Tangenten und ziehe nun den dazu gehörigen Kreis.

XI. Zeichnung verschiedener Bogenlinien.

§. 113. Aufgabe.

Die Schlangenlinie zu bilden.

Aufl. Trage (Fig. 121) auf eine L. ab eine beliebige Anzahl gleicher Theile (6); betrachte dieselben als Radien und beschreibe aus dem 1., 3., 5. 2c. Theilungspuncte abwechselnd auf beiden Seiten der L. ab Halbkreise.

Zus. Die doppelte Schlangenlinie (Fig. 122) wird in ähnlicher Weise nur mit abwechselnd größerem und kleinerem Halbmesser gebildet.

§. 114. Aufgabe.

Die Wellenlinie zu bilden.

Aufl. Ziehe (Fig. 123) 3 Linien in gleicher Entfernung von einander || und verbinde sie durch den Perpendikel c d; trage nun an die beiden äußersten Ll. die Entfernung a c so oft, als möglich ist, auf; ziehe dann a b und beschreibe mit dieser L. als Halbmesser aus den Puncten b, e, f rc. auf beiden Seiten der mittleren Parallellinie Bögen.

Zus. Die doppelte Wellenlinie (Fig. 124) wird in ähnlicher Weise nur mit abwechselnd größerem und kleinerem Halbmesser gebildet.

§. 115. Aufgabe.

Die Spirallinie aus Halbkreisen zu bilden.

Aufl. Ziehe (Fig. 125) auf einer g. L. aus einem beliebigen Puncte a einen kleinen Halbkreis; setze den Zirkel in b ein und beschreibe mit dem Halbmesser b c auf der andern Seite wieder einen Halbkreis, dann von a aus mit a d einen neuen Halbkreis u. s. w.

Zus. Soll eine doppelte parallellaufende Spirallinie (Fig. 126) gebildet werden, so beschreibe aus a zwei parallele Halbkreise; setze dann den Zirkel in b und ziehe zwei neue Halbkreise u. s. w.

§. 116. Aufgabe.

Die Spirallinie aus Viertelskreisen zu bilden.

Aufl. Ziehe zwei g. Ll., welche sich senkrecht durchschneiden und beschreibe aus dem Durchschnittspunct einen kleinen Kreis (Fig. 127); halbire dann die Quadranten durch zwei sich senkrecht durchschneidende Durchmesser; theile jeden derselben in 4 gleiche Theile; beschreibe aus 1 mit 1 e als Halbmesser den Viertelskreis e f, dann aus 2 den Viertelskreis f g, aus 3 den Viertelskreis g h u. s. w.

§. 117. Aufgabe.

Die gedrückte oder ovale Spirallinie zu bilden.

Aufl. Errichte (Fig. 128) auf den beiden Seiten der L. a b gleichseitige △ und verlängere zwei Seiten nach g, h, e, d; ziehe an die Puncte a, c, b, f kleine einander gleiche Perpendikel, wie die Figur zeigt; setze den Zirkel in 1 ein, eröffne ihn bis b und ziehe einen Bogen zwischen den Schenkeln des ∟ e c d; setze dann in 2 ein und ziehe den Bogen zwischen den Schenkeln des ∟ e a g; setze dann in 3 und in 4 ein, dann wieder in 1 u. s. w.

§. 118. Aufgabe.

Die Schneckenlinie zu bilden.

Aufl. Ziehe (Fig. 129) eine beliebige g. L. a b; gib ungefähr in der Mitte derselben von einem Puncte 1 rechts und links eine beliebige Anzahl kleiner Theile an (hier 3 Theile); setze den Zirkel in 1 und be-

schreibe mit 1 — 7 einen Kreis; setze dann in 2 ein und ziehe mit 2—7 den Halbkreis 7 c e; setze in 3 ein und ziehe den Halbkreis e f; setze in 4 ein u. s. w.

§. 119. Aufgabe.

Die jonische Schneckenlinie zu ziehen.

Aufl. Wenn die L. fg die Höhe der Schnecke ist (Fig. 130), so theile sie in 8 gleiche Theile, ziehe aus der Mitte des fünften Theiles (b c) einen Kreis a b d e, dessen Durchmesser = b e; errichte in der Mitte desselben die senkrechte (wagrechte) L. h i und ziehe a b, b d, d e, e a. (Zur bessern Deutlichkeit ist das Quadrat a b d e seitwärts vergrößert gezeichnet). Halbire dann jede dieser Ll. und vereinige die Puncte 1 — 3 und 2 — 4 durch g. Ll.; theile jede derselben in 6 gleiche Theile und bezeichne sie durch Ziffern in der angegebenen Weise. Nun ziehe von 1 mit dem Halbmesser 1 f den Bogen h f, von 2 den Bogen f i, von 3 den Bogen i g u. s. w.

Zus. Die doppelte jonische Schnecke mit || laufenden Ll. entsteht dadurch, daß mit kleinerem oder größerem Halbmesser jeder Bogen doppelt gezogen wird.

§. 120. Aufgaben.

Ovallinien zu bilden. (Oval heißt eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, welche eine länglich runde Fläche einschließt.)

a) Eigentliche Ovallinien, d. h. solche, welche der Eiform ähnlich sind.

1. Aufl. (Aus einem Kreis). Zeichne (Fig. 131) eine Kreislinie und durchschneide zwei Durchmesser (a b und d c) unter R R; ziehe durch c die Ll. a f und b e und aus a mit a b als Halbmesser den Bogen b f und von b mit a b den Bogen a e, zuletzt noch von c den Bogen e f.

2. Aufl. (Aus 2 Kreisen). Ziehe eine g. L. a o (Fig. 132), theile sie in 3 gleiche Theile, beschreibe mit a b als Halbmesser aus b und c Kreise, ziehe h g und i f; setze den Zirkel in i und ziehe mit i f als Halbmesser den Bogen f e und ebenso von h den Bogen g e; halbire e c in d; ziehe durch d die Ll. i m und h n und von d mit dem Halbmesser d m den Bogen m n.

3. Aufl. (Zu einem gegebenen kurzen und langen Durchmesser). Die beiden Durchmesser sind A und B (Fig. 133). Ziehe eine g. L. e f = A; halbire sie in g, ziehe aus g mit g e einen Kreis und errichte durch g eine auf e f senkrecht stehende L. z m = B; halbire k m in n; mache g h und g i = 4 × n m und g o = 3 × n m; ziehe durch o die Ll. h q und i p und von h und i aus die Bögen e q und f p und von n aus den Bogen q m p.

b) Die Ellipse.

Aufl. Befestige in beliebigen Puncten a und b Stifte (Fig. 134) und ziehe um sie einen an den Enden zusammen gebundenen Faden, welcher, doppelt genommen, länger ist, als die Entfernung der Stifte; spanne die Schnur durch einen Bleistift (c) an und fahre herum, so beschreibt die Spitze des Bleistiftes eine Ellipse. Je länger der Faden, desto größer wird der kürzere Durchmesser im Vergleich zum größeren, und je kürzer der Faden, oder je entfernter die Stifte a und b stehen, desto länger wird der größere Durchmesser. Je näher also die beiden Puncte (a und b) stehen, desto näher kommt die Ellipse einem Kreise und umgekehrt.

Erklärung. Die beiden feststehenden Puncte a und b nennt man Brennpuncte, den Halbirungspunct der L. ab den Mittelpunct der Ellipse, die L. de die große und cg die kleine Achse, den Abstand des Mittelpunctes von dem Brennpuncte die Excentricität, eine g. L. von einem Brennpuncte (a) nach der Peripherie, (also ah) Zuglinie oder Radiusvector, die g. L. von dem andern Brennpunct (b) in demselben Punct der Peripherie die zugeordnete Zuglinie. Aus der Construction der Ellipse ist leicht zu erkennen, daß die Summe der Entfernung eines jeden Punctes der Peripherie von den beiden Brennpuncten eine constante oder unveränderliche Größe ist, daß also (ac + bc) = ah + bh). Die Ellipse ist daher eine krumme Linie, welche von zwei gegebenen Puncten in derselben Ebene stets dieselbe Summe der Abstände hat, oder bei welchen die Summe der beiden zugeordneten Zuglinien immer eine unveränderliche Größe ist.

c) Einige Ovallinien, welche der Ellipse mehr oder weniger ähnlich und aus Kreisbogen zusammengesetzt sind.

1. Aufl. (Aus 2 Kreisen). Ziehe eine beliebige L. ab (Fig. 135), theile sie in 3 gleiche Theile, beschreibe aus c und d mit dem Halbmesser ca Kreise, ziehe eg, eh, fi, fk und von e und f mit eg als Halbmesser die Bögen gh und ik.

2. Aufl. (Aus 3 Kreisen). Ziehe eine beliebige L. ab (Fig. 136), theile sie in 4 gleiche Theile, beschreibe mit dem Halbmesser ca aus c, d und e Kreise, ziehe fg senkrecht auf ab, dann fk, fm, gh, gi und aus f und g mit fk als Halbmesser die Bögen hi und km.

3. Aufl. (Zu einem gegebenen kurzen Durchmesser). Mache ab (Fig. 137) = dem gegebenen Durchmesser A, theile ab in 8 gleiche Theile, ziehe aus c und d mit $3\frac{1}{2}$ Theilen, d. i. mit $\frac{1}{2}$ ac die zwei Bögen mn; ferner von c und d durch m und n die Ll. ce, cf, dh, dg = ac, d. h. mache sie 7 Theile lang, beschreibe dann aus m und n mit mh als Halbmesser die Bögen h und e und gf und von c und d mit ac als Halbmesser die Bögen ef und hg.

4. Aufl. (Zu einem gegebenen langen Durchmesser). Mache die L. a b (Fig. 135 oder 136) = dem gegebenen Durchmesser und verfahre entweder nach der 1. oder 2. Auflösung dieses §.

5. Aufl. (Zu einem gegebenen kurzen und langen Durchmesser). Setze (Fig. 138) die beiden Durchmesser (a b und c d) an ihren Halbirungspuncten rechtwinklig an einander, ziehe mit o d als Halbmesser einen Kreis, halbire a i und trage 3 solcher Hälften von o nach g und nach h und 4 solcher Theile von o nach e und nach f, ziehe e q, e p, f m, f n, und von f und e, mit f d als Halbmesser, die Bögen m n und q p und von g und h mit g m als Halbmesser die Bögen m q und n p.

Zus. Auch auf folgende Art läßt sich diese Aufgabe noch lösen: Setze die beiden Durchmesser a b und c d (Fig. 139) an ihren Halbirungspuncten rechtwinklig an einander, nimm den Punct e willkürlich an, doch so, daß a e < c o, mache f b = a e und c g = a e, halbire die L. e g durch k m, wodurch die L. c d in h durchschnitten wird, mache i o = o h und ziehe i p, i q, h r, h s, und von e und f mit e a als Halbmesser die Bögen t u und v w und von h und i die Bögen u c v und t d w.

XII. Ein- und Umschreibungen.

§. 121. Erklärungen.

a) Eine Figur heißt in eine andere eingeschrieben, wenn sie so in der andern liegt, daß ihre Ecken die Seiten der größern Figur berühren.

b) Eine Figur heißt um eine andere umschrieben, wenn ihre Seiten die Ecken der kleineren Figur berühren.

c) Wenn die Seiten einer regelmäßigen geradlinigen Figur Sehnen eines Kreises sind, so sagt man, die geradlinige Figur sei in den Kreis beschrieben.

d) Wenn die Seiten einer regelmäßigen geradlinigen Figur Tangenten eines Kreises sind, so sagt man, die geradlinige Figur sei um den Kreis beschrieben.

Anmerk. Es können regelmäßige und unregelmäßige Figuren eingeschrieben und umschrieben werden; doch soll hier vorzugsweise nur von regelmäßigen Figuren gehandelt werden.

A) Kreise in und um Vielecke.

§. 122. Lehrsatz.

In und um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis: Da nach §. 87 in jedem Vieleck ein Mittelpunct sich befindet, der von den Seiten und Winkeln des Vielecks gleichweit entfernt

ist, so ist dieser Punct zugleich der Mittelpunct des zu beschreibenden Kreises (Vergl. den weiteren Beweis zu §. 87).

Zus. Soll also in oder um ein gleichseitiges △, Quadrat u. s. w. ein Kreis beschrieben werden, so suche nach §. 107 oder 102, Zus. 3 den Mittelpunct, ziehe im ersten Fall eine Linie vom Mittelpunct auf den Halbirungspunct einer Seite, so ist die Linie der Radius des einzuschreibenden Kreises, und im zweiten Fall ziehe eine Linie in den Mittelpunct des regulären Vielecks, so ist diese Linie der Radius zu dem Kreise, welcher sich um die Figur beschreiben läßt.

§. 123. Aufgabe.

In oder um ein beliebiges Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. a) Wenn in einem △ ein Kreis beschrieben werden soll, so sind die Seiten des △ Tangenten. Da aber der Mittelpunct eines Kreises nach §. 107 in der Linie liegt, welche den Winkel halbirt, den zwei Tangenten einschließen, so braucht man blos zwei solcher Winkel (des △) zu halbiren und die Halbirungslinien so weit zu verlängern, bis sie sich durchschneiden. Der Durchschnittspunct o (Fig. 140) ist der Mittelpunct und der auf die eine Seite des △ gezogene Perpendikel o a ist der Radius des zu ziehenden Kreises. — Der Beweis fließt aus der Auflösung und namentlich aus §. 107.

b) Wenn um ein △ ein Kreis beschrieben werden soll, so sind die Seiten des △ Sehnen des Kreises. Da aber nach §. 102 Zus. 3 ein Perpendikel, welcher aus dem Halbirungspuncte einer Sehne errichtet wird, gehörig verlängert, durch den Mittelpunct geht, so findet man also diesen, wenn man aus den Halbirungspuncten zweier Seiten des △ (Fig. 141) Perpendikel errichtet, die sich (in c) durchschneiden. Der Punct c ist der Mittelpunct und c d der Radius des zu ziehenden Kreises. — Der Beweis stützt sich ganz auf §. 102.

Zus. Folglich läßt sich auch durch 3 gegebene Puncte, welche nicht in einer g. L. liegen, eine Kreislinie ziehen. Die drei Puncte seien a, b, c (Fig. 142). Verbinde sie durch die g. Ll. a b und b c; betrachte diese Ll. als Sehnen der zu beschreibenden Kreislinie und errichte aus ihren Halbirungspuncten Perpendikel, die sich in d durchschneiden, so ist d der Mittelpunct und d a oder d c der Halbmesser der verlangten Kreislinie.

B) Vielecke in und um Kreise.

§. 124. Lehrsatz.

Wird die Kreislinie in eine gegebene Anzahl gleicher Theile, z. B. in sechs Theile getheilt, so entsteht a) ein regelmäßiges Vieleck im Kreise, wenn je zwei zunächst liegende Theilungspuncte durch eine Sehne verei-

nigt werden und b) ein regelmäßiges Vieleck um den Kreis, wenn durch die Theilungspuncte Tangenten gezogen werden, die sich treffen.

Beweis: a) Da nach der Bedingung die Bogen a b, b c u. s. w. (Fig. 143) gleich sind, so sind auch die Sehnen a c, b c u. s. w. gleich (§. 104), somit hat das Vieleck gleiche Seiten und auch die ∟∟ sind gleich; denn ∟ a b c steht auf dem Bogen a f e d c $= \frac{4}{6}$ von der Kreislinie; ∟ b c d auf dem Bogen b a f e d $= \frac{4}{6}$ von der Kreislinie u. s. w.; folglich ist das Vieleck ein regelmäßiges.

b) Werden vom Mittelpuncte c (Fig. 144) zu den Berührungspuncten Radien gezogen, so ist

∟ i c h = ∟ h c g (§. 24. Zus. 1)
∟ c i d = ∟ c h b } (§. 106. (Zus. 1)
∟ c h d = ∟ c g b }
i c = c g } (als Radien)
c h = c h }

Viereck i c h d $\cong$ h c g b (§ 68)

∟ i d h = ∟ h b g und d k = h b

In ähnlicher Weise kann der Beweis fortgeführt und gezeigt werden, daß nicht blos die Vieleckswinkel, sondern auch die Seiten gleich sind, und daß also das Vieleck ein regelmäßiges ist.

Anmerk. Obgleich durch den vorstehenden Lehrsatz die Aufgaben, Vielecke in und um Kreise zu beschreiben, in jedem Falle leicht zu lösen sind, so gibt es doch hie und da oft noch ein mehr oder weniger mechanisches Verfahren, wodurch das Zeichnen der Vielecke sehr erleichtert wird; daher sollen noch einige Auflösungen, dergleichen Vielecke zu zeichnen, folgen. Doch sind das Siebeneck nnd Eilfeck nur annährend richtig.

1. Aufg. Ein gleichseitiges Dreieck in und um einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. a) Theile die Kreislinie in 3 gleiche Theile (durch den Halbmesser zuerst in 6 und durch Uebergehung immer eines Theilpunctes in 3 Theile) und vereinige die Theilungspuncte durch g. Ll. (Fig. 145.)

b) Theile die Kreislinie in drei gleiche Theile, ziehe durch die Theilnngspuncte vom Centrum aus g. Ll. und mache jede = dem Durchmesser. Ihre durch g. Ll. vereinigten Endpuncte bilden das △ (Fig. 145).

2. Aufg. Ein Quadrat in und um einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. a) Theile (Fig. 146) die Kreislinie durch zwei senkrecht sich durchschneidende Durchmesser (a b und c d) in 4 gleiche Theile und verbinde die Theilungspuncte durch g. Ll.

b) Theile den Kreis wie bei a und ziehe durch die Theilungspuncte Tangenten (Fig. 146).

3. Aufg. Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis einzuschreiben.

Aufl. Ziehe (Fig. 147) zwei senkrecht durchschneidende Durchmesser a b und d c, ziehe von c aus den Bogen e i g und von f aus den Bogen a h, so ist die g. L. a h einer Seite des Fünfecks gleich und läßt sich also fünfmal im Kreise herumtragen.

4. Aufg. Ein regelmäßiges Siebeneck in einen Kreis einzuschreiben.

Ansl. Beschreibe (Fig. 148) aus einem beliebigen Puncte d durch den Mittelpunct b den Bogen a b c, ziehe a c und b d, so ist a e = einer Seite des Siebenecks.

5. Aufg. Ein regelmäßiges Achteck in einen Kreis einzuschreiben.

Aufl. Ziehe (Fig. 149) zwei senkrecht sich durchschneidende Durchmesser a b und c d, halbire den Bogen d b in e, so ist d e = einer Seite des Achtecks.

6. Aufg. Ein Neuneck in einen Kreis einzuschreiben.

1. Aufl. Theile (Fig. 150) den Bogen a d b in 3 gleiche Theile, ziehe an einen Theil die dazu gehörige Sehne, so ist sie = einer Seite des Neunecks.

2. Aufl. Ziehe (Fig. 151) von einem beliebigen Puncte c aus den Bogen a e b und den Durchmesser c d, ferner mit dem Radius des Kreises von f aus den Bogen h g und von h aus den Bogen f g; ziehe zuletzt g e, so ist a i = einer Seite des Neunecks.

7. Aufg. Ein reguläres Zehneck in einen Kreis einzuschreiben.

Aufl. Ziehe (Fig. 152) zwei senkrecht sich durchschneidende Durchmesser a b und c d, ferner von c aus den Bogen f e g, mache h i = h a, so ist e i = einer Seite des Zehnecks.

8. Aufg. Ein reguläres Eilfeck in einen Kreis einzuschreiben.

Aufl. Ziehe (Fig. 153) zwei senkrecht sich durchschneidende Durchmesser a b und c d, ferner von c aus den Bogen f e g, mache den Bogen d h = a f und ziehe a h, so ist i h = einer Seite des Eilfecks.

9. Aufg. Ein reguläres Zwölfeck in einen Kreis einzuschreiben.

1. Aufl. Mache (Fig. 154) a c = dem Radius des Kreises, halbire den Bogen a e in b, so ist die Sehne a b = einer Seite des Zwölfecks.

2. Aufl. Ziehe (Fig. 155) zwei senkrecht sich durchschneidende Durchmesser a b und c d und mit dem Radius des Kreises von den Puncten a, c, b, d Kreisbögen, so wird die Kreislinie in 12 Theile getheilt, deren Endpuncte durch g. Ll. vereinigt, das Zwölfeck geben.

10. Aufg. Ein beliebiges reguläres Vieleck in einen Kreis einzuschreiben.

1. Aufl. Ziehe (Fig. 156) an den Durchmesser a b eine beliebige L. a c, trage auf sie so viele beliebige, aber gleiche Theile, als das Vieleck Seiten erhalten soll, (hier 5), ziehe c b durch den jedesmaligen zweiten Theilungspunct (d) d f || c b; mache nun von a und b aus mit dem Durch-

messer (a b) Kreuzbögen in e und ziehe durch h die L. e g, so ist a g die Seite des verlangten Vielecks.

2. Aufl. Ziehe (Fig. 157) den Durchmesser a b, theile ihn in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten erhalten soll (hier 5), mache von a und b aus mit dem Durchmesser (a b) Kreuzbögen in e, und ziehe von e aus durch den jedesmaligen zweiten Theilungspunct (d) die g. L. e d c, so ist a c = einer Seite des verlangten Vielecks.

3. Aufl. Theile (Fig. 158) den Durchmesser a b in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten erhalten soll (hier 7), trage einen Theil von a nach d, errichte aus c den Perpendikel c i und mache i e = a d, ziehe d e und f g d. h. von f bis zu dem jedesmaligen dritten Theilungspuncte, so ist f g = einer Seite des verlangten Vielecks.

Anmerk. Durch diese Auflösung findet man aber die Seite des Vielecks nicht ganz genau, sondern nur möglichst annähernd genau; doch beträgt die Abweichung ausserordentlich wenig. Auch ist erst vom Sechseck an diese Auflösung zu gebrauchen.

4. Aufl. Theile (Fig. 159) den vierten Theil der Kreislinie (d b) in so viele Theile, als das Vieleck Seiten erhalten soll (hier 7); die ganze Peripherie erhält dann 4 mal so viel ($4 \times 7 = 28$), verbinde nun vier Theile durch eine Sehne, so ist diese = einer Seite des verlangten Vielecks (denn $\frac{28}{4} = 7$).

Zus. Soll in einem Kreise, in welchem schon ein reguläres Vieleck gezeichnet ist, ein anderes mit doppelter Seitenzahl construirt werden, so halbire jeden zu einer Seite gehörigen Bogen und ziehe von den Halbirungspuncten aus in die zwei nächst gelegenen Ecken des Vielecks Sehnen.

11. Aufg. Irgend ein reguläres Vieleck um einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Beschreibe zuerst ein reguläres Vieleck mit der verlangten Seitenzahl in den Kreis, ziehe vom Mittelpunct Radien in die Ecken und durch sie Tangenten, welche sich berühren.

Zus. Soll um einen Kreis, in welchem bereits ein reguläres Vieleck gezeichnet ist, ein anderes von doppelter Seitenzahl construirt werden, so halbire jeden zu einer Seite des Vielecks gehörigen Bogen und ziehe durch diese Halbirungspuncte sowohl, als auch durch die Ecken des Vielecks Tangenten, welche sich an ihren Endpuncten berühren.

C) Kreise in und um Kreise.

§. 125. Aufgabe.

In einen Kreisausschnitt einen Kreis einzuschreiben.

Aufl. Halbire (Fig. 160) den Centriwinkel durch c d, ziehe durch d die Tangente e f, verlängere c b bis sie die Tangente trifft, halbire den

∟ d f c so, daß die Halbirungslinie die L. c d in g durchschneidet, so ist g das Centrum und g d der Halbmesser des zu ziehenden Kreises.

Der Beweis stützt sich vorzüglich auf §. 107. Der Mittelpunct liegt nämlich in der L. c d; die Ll. f d und f h sind Tangenten, die einander gleich sind, und man findet also ebenfalls den Mittelpunct nach §. 107 Zus., wenn man den ∟ d f h halbirt.

§. 126. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis excentrische Kreise zu zeichnen, die sich selbst außerhalb, den gegebenen Kreis aber innerhalb berühren.

Aufl. Theile die Kreislinie in so viele Theile, als excentrische Kreise verlangt werden (bei Fig. 161 in 6), ziehe vom Centrum aus in die Theilungspuncte Radien, wodurch Kreisausschnitte entstehen und zeichne nun nach §. 125 in jeden Kreisausschnitt einen Kreis. Der Beweis wie §. 125.

§. 127. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis drei, vier ꝛc. excentrische Kreise zu zeichnen, die sich sowohl, als den gegebenen Kreis außerhalb berühren.

Aufl. Theile den gegebenen Kreis in so viele gleiche Kreisausschnitte, als Kreise um ihn gezogen werden sollen (bei Fig. 162. 5) und verlängere die Radien (Theilungslinien) über die Peripherie hinaus. Halbire nun einen Bogen eines Kreisausschnittes in e, ziehe c e und an e die Tangente g f, halbire ferner den ∟ a g f und den ∟ b f g und verlängere die Halbirungslinien, daß sie sich in d durchschneiden. Der Punct d ist das Centrum und d e der Radius des zu ziehenden Kreises. Die übrigen Kreise sind nun leicht zu ziehen. Die Auflösung stützt sich auf §. 107 Zus. Die Ll. g h, g e und f i sind nämlich Tangenten, und man findet also den Mittelpunct des zu ziehenden Kreises, wenn man die ∟∟ h g e und e f i halbirt u. s. w.

D) Regelmäßige Vielecke in und um regelmäßige Vielecke.

§. 128. Aufgabe.

Ein regelmäßiges Vieleck in ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Aufl. Halbire jede Seite des Vielecks und vereinige die jedesmal zunächstliegenden Halbirungspuncte durch eine g. L. (Fig. 163).

§. 129. Aufgabe.

Ein regelmäßiges Vieleck um ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Aufl. Denke das regelmäßige Vieleck in einen Kreis gezeichnet und ziehe durch die Winkelpuncte des Vielecks Tangenten, welche sich an ihren Endpuncten berühren.

Anmerk. Wenn vom △ ausgegangen wird, so ist der Beweis (Fig. 163) leicht zu führen, daß a b c ein regelmäßiges △ sei; denn alle 4 △ sind congruent und gleichseitig; und auch umgekehrt ergibt sich die Gleichheit

der ∟ und Seiten des △ ABC. Auch bei den übrigen regelmäßigen Vielecken kann der Beweis mittelst der △ geführt werden (z. B. Fig. 164), weil sie alle in congruente △ sich zertheilen lassen. Um Raum zu ersparen, sind die Beweise hier weggelassen; dafür folgen noch einige Aufgaben, deren Beweise sich größtentheils auf die §§. 48 u. 68 stützen.

§. 130. Aufgabe.

Ein gleichseitiges Dreieck in und um ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Aufl. Im ersteren Falle vereinige entweder die Puncte a e c (Fig. 165) durch g. Ll. oder halbire a f, e d, und c b und verbinde die Halbirungspuncte durch g. Ll. Im zweiten Falle verlängere (Fig. 166) drei Seiten des Sechsecks, welche einander nicht berühren, über ihre Endpuncte, bis die Verlängerungslinien in a, b und c sich treffen.

§. 131. Aufgabe.

Ein reguläres Sechseck in und um ein Dreieck zu beschreiben.

Aufl. Im ersten Falle theile (Fig. 166) jede Seite des △ in 3 gleiche Theile und vereinige je zwei zunächst liegende Theilungspuncte durch g. Ll.

Im zweiten Falle suche (Fig. 167) nach §. 87 das Centrum c des △, beschreibe von demselben in c a einen Kreis und trage in demselben, von einem Ecke des △ beginnend, den Halbmesser herum. Gerade Linien, welche die Durchschnittspuncte vereinigen, bilden dann das Sechseck.

§. 132. Aufgabe.

Ein Quadrat in und um ein reguläres Achteck zu beschreiben und umgekehrt.

Aufl. a) Vereinige die Puncte f, d, b, h (Fig. 168) durch g. Ll., dann entsteht das □ f d b h.

b) Ziehe im Achteck zwei Diagonallinien, die sich im Centrum rechtwinklig durchschneiden und errichte auf jeder Hälfte der Diagonallinie ein Quadrat, also das □ g o e n, □ o c m e u. s. w.

c) Ziehe die Diagonalen i m und k n, halbire jede Seite des □ i k m n und ziehe g c und a e, mache jede der Ll. o f, o d, o b, o h = o g und ziehe zuletzt die Ll. a h, h g, g f u. s. w.

d) Ziehe wie bei c die Diagonalen und Theilungslinien und mache jede Linie von o an = $\frac{1}{2}$ Diagonallinie = o g und ziehe zuletzt die Ll. a h, h g.

§. 133. Aufgabe.

Eine Raute in und um ein Rechteck zu beschreiben und umgekehrt.

Aufl. a) Halbire die Seiten und vereinige je zwei Theilungspuncte durch g. Ll. so, daß sie || laufen (Fig. 169).

b) Ziehe im Rechtecke die Diagonalen und dann durch die Ecken des Rechteckes || mit den Diagonalen g. Ll. so lange, bis sie sich durchschneiden.

Uebungsaufgaben.

81) Zeichne in einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges △, von welchem die Grundlinie gegeben ist. (Es versteht sich wohl von selbst, daß die Grundlinie die Größe des Durchmessers nicht überschreiten darf.)

82) Zeichne in einen Kreis ein △, von welchem die Grundlinie und ein ∟ an derselben gegeben sind.

83) Zeichne um einen Kreis ein gleichschenkliges △.

84) Zeichne um einen Kreis ein gleichschenkliges △, von welchem die Grundlinie gegeben ist, (doch muß die Grundlinie größer, als der Durchmesser sein).

85) Zeichne um einen Kreis ein △, von welchem die 3 ∟ gegeben sind.

86) Zeichne in einen gegebenen Kreis ein Quadrat.

87) Zeichne um einen Kreis ein reguläres Zwölfeck.

88) Zeichne einen Kreis, der eine gegebene L. in zwei bestimmten Puncten durchschneidet; der Mittelpunct liege aber außerhalb der gegebenen L.

89) Zeichne durch 3 Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis.

90) Zeichne in einen gegebenen Kreis vier gleiche excentrische Kreise, welche sich außerhalb und den gegebenen Kreis innerhalb berühren, und um den gegebenen Kreis 8 excentrische Kreise, die sich sowohl, als den gegebenen Kreis außerhalb berühren.

91) Zeichne ein Quadrat und an die 4 Ecken gleiche Kreise, welche sowohl sich als den Eckpunct des Quadrats berühren.

92) Zeichne in ein gegebenes Quadrat ein anderes Quadrat, dessen Ecken die Seiten des ersten Quadrats berühren.

93) Zeichne in ein regelmäßiges Sechseck ein Quadrat, dessen Ecken vier Seiten des Sechsecks berühren.

94) Zeichne in ein regelmäßiges Sechseck ein Rechteck, dessen Seiten vier Seiten des Sechsecks berühren.

XIII. Von der Gleichheit der Figuren.

A) Von der Gleichheit der Figuren im Allgemeinen.

§. 134. Erklärung.

a) Aus §. 38 ist bekannt, daß Figuren einander gleich sind, wenn sie in der Größe übereinstimmen; sie können aber dabei eine verschiedene Gestalt haben. Congruent sind aber Figuren, wenn zur Uebereinstimmung der Größe auch Uebereinstimmung in der Gestalt kommt. Von der Congruenz der Dreiecke ist bereits die Rede gewesen, und da alle geradlinige Figuren sich in Dreiecke zertheilen lassen, so kann also auch die Congruenz der Vielecke nachgewiesen werden, wenn die Congruenz der einzelnen Dreiecke dargethan wird.

b) Ja selbst die Gleichheit zweier Figuren (die also nicht zugleich ähnlich sind) läßt sich eigentlich nur begreifen, wenn man annimmt, daß die unendlich kleinen Theile der einen Figur durch veränderte Aneinanderreihung die Gestalt der andern Figur geben. Wenn man von dieser Ansicht ausgeht, so kann selbst eine krummlinige Figur einer geradlinigen gleich sein, wenn auch beide Figuren nicht die geringste Aehnlichkeit haben.

§. 135. Lehrsatz.

Parallelogramme mit gleicher Höhe und Grundlinie sind gleich.

Beweis: Lege die beiden Parallelogramme (Fig. 170) so aufeinander, daß ihre Grundlinien sich decken; da ihre Höhen gleich sind, so liegen die gegenüberstehenden Seiten c d und e f in einer g. L. Nun ist aber

$$\begin{array}{c} cd + de = ef + de \text{ (IV)} \\ \left.\begin{array}{r} ac = bd \\ ae = bf \end{array}\right\} \text{(§. 70)} \\ \hline \triangle ace \cong \triangle bdf \text{ (§. 50).} \end{array}$$

Ziehe ich nun von dem Trapez a b f c das △ a c e ab, so bleibt das # a b f e übrig, und ziehe ich das △ b d f ab, so bleibt das # a b d c übrig; beide # # sind aber einander gleich (V).

§. 136. Lehrsatz.

Jedes Dreieck ist halb so groß, als ein Parallelogramm, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beweis: Ist das △ a b c (Fig. 171) gegeben, so mache c d = a b und b d = a c; nun ist a b d c ein # (§. 71) und c b die Diagonale. Nach §. 70. Zus. 2 ist aber dann △ a b c ≅ △ b d c und folglich △ a b c = $\frac{1}{2}$ # a b d c.

Zus. 1. Jedes #, das mit einem △ gleiche Grundlinie und Höhe hat, ist also = 2 solcher △.

Zus. 2. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind also einander gleich.

Zus. 3. Jedes △ ist einem # gleich, welches dieselbe Höhe und die halbe Grundlinie hat. Da (Fig. 172) △ a b c = $\frac{1}{2}$ # a b d c (§. 136) ist, und (wenn a e = e b und e f || a c) # a e f c = # e b d f, so ist auch △ a b c = # a e f c = # e b d f.

Zus. 4. Ebenso ist jedes △ einem # gleich, welches dieselbe Grundlinie, aber nur die halbe Höhe hat. (Fig. 173).

§. 137. Lehrsätze.

a) Jedes Trapez ist einem Parallelogramm gleich, welches mit dem Trapez dieselbe Höhe und die mittlere Länge des Trapezes zur Grundlinie hat und b) Trapeze von gleichen parallelen Seiten und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis: a) Das # a g h d (Fig. 80) hat mit dem Trapez a b c d gleiche Höhe und die mittlere Länge des Trapezes zur Grundlinie; denn a g = e f. Das Trapez selbst aber besteht aus dem Fünfeck a g f c d und dem △ g b f; das # besteht auch aus demselben Fünfeck und dem △ h c f. Da aber diese △ nach dem Beweis in §. 79 congruent sind, so muß das Trapez a b c d auch dem # a g h d gleich sein.

b) Man könnte die beiden Trapeze in gleich große # # verwandeln und die Gleichheit der # # beweisen u. s. w. Einfacher ist jedoch folgender Beweis: Ziehe in dem Trapez a b c d (Fig. 252) die L. d e und mache b f = a e; nun ist e f c d auch ein Trapez und hat mit dem ersteren Trapez gleiche parallele Seiten und gleiche Höhe. Da aber △ a e d = △ b f c

(§. 136), so ist auch Trapez e f c d = Trapez a b c d; denn sie bestehen aus gleichen Theilen.

§. 138. Lehrsatz.

Jedes regelmäßige Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches den Umfang des Vielecks zur Grundlinie und die Entfernung des Mittelpunctes von einer Vielecksseite zur Höhe hat.

Beweis: Um den Beweis zu liefern, theile das Vieleck, z. B. das Sechseck (Fig. 174) vom Mittelpunct aus in congruente △; ziehe dann eine g. L. a b und mache sie = der Summe der Umfangslinien des Vielecks (hier 6×p q), errichte an a einen Perpendikel a r = x o = der Höhe des einen △ und ziehe r b, so ist △ a b r = dem gegebenen Vieleck. Denn zeichnet man die △ des Vielecks auf die L. a b, so ist △ a c r = △ a c h (§. 136), △ c d r = △ c d i (§. 136) u. s. w.; also △ a b r = allen △ des Vielecks, = dem Vielecke selbst.

Zus. Ist in einen Kreis ein reguläres Sechseck gezeichnet, so ist eine der geraden Umfangslinien = dem Radius (§. 105), und der Bogen zu einer Seite des Sechsecks ist = $\frac{1}{6}$ der Peripherie. Denkt man sich ein Zwölfeck in einen Kreis gezeichnet, so werden die Umfangsseiten und die dazu gehörigen Bögen kleiner, und denkt man sich ein Vieleck von unendlich vielen Seiten in einen Kreis construirt, so fallen endlich die Umfangsseiten des Vielecks mit der Peripherie selbst beinahe zusammen, so daß der Umfang eines solchen Vielecks dem Umfange des Kreises, d. h. der Peripherie gleich zu achten ist. Daher kann auch umgekehrt der Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet und der Lehrsatz dieses §. auf ihn angewendet werden. Folglich ist auch der Kreis einem △ gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

§. 139. Lehrsatz.

Werden durch irgend einen beliebigen Punct der Diagonale in einem Parallelogramm Linien mit den Seiten des Parallelogramms parallel gezogen, so sind die beiden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Beweis: Durch die Parallellinien, die (Fig. 175) von dem beliebigen Puncte d aus im # i b e g gezogen wurden, entstunden vier # #. Nun ist aber △ i g e ≅ △ i b e (§. 70. Zus. 2) und, da auch ebenso △ E = △ F und △ C = △ D ist, so ist auch △ i g e — (△ E + △ C) = △ i b e — (△ F + △ D) oder # B = # A.

§. 140. Lehrsatz.

Die Summe der Quadrate über den beiden Katheten ist gleich dem Quadrate der Hypotenuse.

1. **Beweis:** (Fig. 176) Ziehe $a\,i \parallel b\,k$, ferner $e\,c$ und $a\,k$; dann $b\,g$ und $a\,h$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} eb = ab \\ bc = bk \end{array}\right\} \text{§. 69 b)}$$

$\angle ebc = \angle abk$; denn $\angle eba = R$ und $\angle cbk = R$

$\triangle ebc \cong \triangle abk$ (§. 48) $\quad \angle eba + \angle abc = \angle cbk + \angle abc$ (IV)

d. h. $\angle ebc = \angle abk$

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} \triangle ebc = \frac{1}{2}\square A \\ \text{und } \triangle abk = \frac{1}{2}\# B \end{array}\right\}$ (§. 136)

$\square A = \# B$ (IV. Zus.)

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} bc = ch \\ cg = ca \end{array}\right\}$ (§. 69 b)

$\angle bcg = \angle ach$; denn $\angle gca = R$ und $\angle bch = R$

$\triangle bcg \cong \triangle ach$ (§. 18) $\quad \angle gca + \angle acb = \angle bch + \angle acb$

d. h. $\angle bcg = \angle ach$

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} \triangle bcg = \frac{1}{2}\square C \\ \text{und } \triangle ach = \frac{1}{2}\# D \end{array}\right\}$ (§. 136)

$\square C = \# D$ (IV. Zus.)

Da nun $\square A = \# B$
und $\square C = \# D$

$\square A + \square C = \square (B + D)$.

2. **Beweis:** (Fig. 177) $f\,a\,c\,d$ ist das $\square$ der Kathete $a\,c$; da $f\,i = a\,b$, so ist $f\,i\,h\,g$ das $\square$ der Kathete $a\,b$; $h\,b\,c\,e$ ist das $\square$ der Hypotenuse $b\,c$.

$$\left.\begin{array}{l} hb = he \\ hi = hg \end{array}\right\} \text{(§. 69 b)}$$

$\angle x = \angle z$; denn $\angle x + y = R$

$\angle z + y = R$

$\triangle D \cong \triangle A$ (§. 48) $\quad \angle x = \angle z$ (V)

$hi = ab$ (Verf.)

Ferner $ib = ac$; denn $ba + ai = fi + ai$ (IV)

$\angle n = \angle m \; (= R)$ oder $ib = fa$

$\triangle D \cong \triangle C$ (§. 48) $\quad ib = ac$

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} cb = ce \\ ca = cd \end{array}\right\}$ (§. 69 b)

$\angle o = \angle q$; denn $o + p = R$

$q + p = R$

$\triangle C \cong \triangle B$ (§. 48) $\quad o = q$ (V)

also ist $A = B = C = D$
und das Fünfeck $E = E$ ($c\,e\,h\,i\,a$)

$A + B + E = C + D + E$

A + B + E sind aber die beiden Quadrate der Katheten und C + D + E machen das □ der Hypotenuse aus.

3. Beweis: (Fig. 178). Mache die eine Kathete a b = 3; die andere a c = 4, so ist die Hypotenuse b c = 5 gleicher Theile; werden nun die drei Quadrate durch || Ll. in kleinere, einander gleiche Quadrate eingetheilt, so hat $A = 3 \times 3 = 9$; $B = 4 \times 4 = 16$ und $C = 5 \times 5 = 25$; da aber $9 + 16 = 25$, so ist $A + B = C$ oder $a b^2 + a c^2 = b c^2$.

Zus. 1. Nach Fig. 178 läßt sich leicht auf eine gegebene L. eine senkrechte ziehen, also ein R oder ein rechtwinkliges △ verfertigen; denn wenn eine L. a b = 3 Theilen, eine andere a c = 4 und eine dritte b c = 5 Theilen an ihren Endpuncten vereinigt werden, so ist a c senkrecht auf a b; ∟ b a c = R und △ b a c ist ein rechtwinkliges.

Zus. 2. Uebrigens ergibt sich gleichfalls ein R, wenn die Zahlen 3 und 4 und 5 mit irgend einer andern Zahl multiplicirt und die Linien in der erhaltenen Größe vereinigt werden, z. B. 4×3 und 4×4 und 4×5 d. i. 12; 16; 20; denn $12^2 + 16^2 = 20^2$; oder 5×3 und 5×4 und 5×5 d. i. $15^2 + 20^2 = 25^2$.

Zus. 3. $a b^2 = (b c^2 - a c^2)$ und $a c^2 = (b c^2 - a b^2)$, d. h. das Quadrat der einen Kathete ist = dem Unterschiede (der Differenz) zwischen dem Quadrat der Hypotenuse und dem Quadrate der andern Kathete.

Anmerk. Der Lehrsatz §. 140 ist unter dem Namen pythagoräischer Lehrsatz (**Magister matheseos**) bekannt, weil er von Pythagoras, einem altgriechischen Weltweisen (gest. 500 v. Chr.), zuerst aufgefunden worden sein soll.

§. 141. Erklärungen.

a) Die von der Spitze a des R c a b (Fig. 176) auf die Hypotenuse b c gefällte senkrechte L. a m heißt der Perpendikel des rechtwinkligen Dreiecks c a b.

b) Die durch diesen Perpendikel entstandenen Theile der Hypotenuse (b m und m c) heißen die Segmente der Hypotenuse.

Zus. 1. Da (Fig. 176) A = B, und B ein Rechteck, dessen eine Seite die Hypotenuse b c (denn b c = b k) und dessen andere Seite das an der Kathete a b anliegende Segment b m ist; da ferner C = D und D ein Rechteck, dessen eine Seite die Hypotenuse b c (denn b c = c h) und dessen andere Seite das an der Kathete a c anliegende Segment m c ist: so ist also das □ einer Kathete = einem Rechtecke, dessen eine Seite die Hypotenuse und dessen andere Seite das an die Kathete anstoßende Segment der Hypotenuse ist.

Zus. 2. Da (Fig. 176) a m senkrecht auf b c steht, so ist △ a m b ein rechtwinkliges; a m und b m sind die Katheten und a b ist die Hypotenuse. Zeichne nun auf b m das Quadrat b m n o. Weil nun b k = b c

und $bo = bm$, so ist auch $ok = mc$. Es ist aber $am^2 + bm^2 = ab^2$, und da ab^2, d. h. $A = B$, so ist auch $am^2 + bm^2 = B$, und da ferner $bm^2 = \square\, bmno$, so ist $am^2 = \#\, onik$, d. h. das $\square$ des Perpendikels am im rechtwinkligen $\triangle$ (cab) ist $=$ einem Rechtecke, dessen eine Seite $= bm$ (denn $on = bm$) und dessen andere Seite $= mc$ (denn $ok = mc$) ist, oder $=$ einem Rechtecke, dessen Seiten die beiden Segmente bilden.

Zus. 3. Ist (Fig. 179) das rechtwinklige $\triangle$ acb zugleich ein gleichschenkliges ($ac = bc$), so sind die Segmente einander gleich ($ad = db$ (§. 53) und der Perpendikel ist $=$ einem solchen Segmente, d. h. $=$ der halben Hypotenuse. Denn zieht man $ae \parallel cb$ und $be \parallel ca$, so ist $\#$ $aebc$ ein $\square$ (§. 73 und §. 69 c) und $cd = ad$ (§. 74 und 76. Zus.)

Zus. 4. Auch ist ein gleichschenklig rechtwinkliges $\triangle$ (Fig. 179 acb) $= \frac{1}{4}$ des $\square$ der Hypotenuse. Ist $abgf$ das $\square$ der Hypotenuse ab, so ist $\triangle\, acb = \triangle\, aeb$ und $\triangle\, aeb = \frac{1}{4} ab^2 = acb$.

§. 142. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches so groß ist, als zwei gegebene Quadrate.

Aufl. Sind die beiden Quadrate A und B (Fig. 180), so setze zwei Seiten von ihnen unter einem R an einander ($\llcorner\, acb = R$), betrachte sie als Katheten und ziehe die Hypotenuse ab, welche $=$ einer Seite des zu fertigenden Quadrates ist.

Beweis. (§. 140.)

Zus. 1. Soll ein $\square$ gezeichnet werden, welches noch einmal so groß ist, als ein gegebenes, so ziehe die Diagonallinie. Diese ist die Seite des doppelt so großen Quadrats.

Zus. 2. Soll ein $\square$ gezeichnet werden, welches 3, 4, 5 u. s. w. mal größer ist, als ein gegebenes $\square$ x (Fig. 181), so setze zwei Seiten ab und bc rechtwinklig an einander und ziehe die Hypotenuse ac, so ist ac eine Seite von einem $\square$, welches $= 2x$; setze dann an ac rechtwinklich eine neue Seite (cd), so ist $ad^2 = 3x$; setze an ad eine neue Seite (de), so ist $ae^2 = 4x$; $af^2 = 5x$ u. s. w.

Zus. 3. Soll ein $\square$ sehr oftmal größer gezeichnet werden, als ein gegebenes x, z. B. 29 mal (Fig. 182), so zerlege die gegebene Zahl in lauter Quadratzahlen; 29 also in $16 + 9 + 4 = (4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2)$. Ziehe nun eine L. cd und mache sie $=$ der Quadratwurzel aus $16 = 4$ mal so lang, als eine Seite des gegebenen Quadrats; errichte an c einen R und mache $ce =$ der Quadratwurzel aus $9 = 3$ ($\times\, ab$) und ziehe ed, so ist $ed^2 = cd^2 + ce^2 = 25 \times x$; ziehe $fe =$ der Quadratwurzel aus $4 = 2 \times (ab)$ unter einem R an ed, so ist $fd^2 = 29 \times x$. So verfährt man in allen ähnlichen Fällen.

Zus. 4. Soll ein Quadrat nur ein Bruchtheil ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{9}$ rc.) eines andern gegebenen sein, so theile die Seiten des gegebenen □ in so viele Theile, als der Nenner des Bruches ist. Dadurch erhältst du kleinere Quadrate, von denen eines nur nach Zus. 2 oder 3 so viel mal größer gezeichnet werden darf, bis es die verlangte Größe erhält. Soll z. B. ein □ nur $\frac{1}{3}$ mal so groß gezeichnet werden, so theile jede Seite des □ in 3 gleiche Theile. Dadurch erhältst Du nun 9 congruente kleine Quadrate, von denen also jedes nur $\frac{1}{9}$ des größern ist; zeichne nun ein solches kleines □ 3 mal größer, so bekommst Du $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ des größeren □, und so in allen ähnlichen Fällen. Doch ist nicht immer diese kleine Zertheilung des gegebenen □ nothwendig; denn wenn z. B. ein □ $\frac{1}{4}$ mal so groß gezeichnet werden soll, so halbire jede Seite und du erhältst 4 congruente kleine Quadrate, von denen jedes $\frac{1}{4}$ des größern □ ist.

§. 143. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte Seite zu finden.

1. Fall. Wenn die beiden Katheten bekannt sind und es soll die Hypotenuse gefunden werden.

1. Aufl. Setze die beiden Katheten rechtwinklig an einander und vereinige ihre andern Endpuncte durch eine g. L., so ist diese die Hypotenuse.

2. Aufl. Miß nach dem verjüngten Maßstabe die beiden Katheten, verwandle die Größe jeder einzelnen Kathete in die Quadratzahl, addire diese und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel; sie gibt die Größe der Hypotenuse.

2. Fall. Wenn eine Kathete und die Hypotenuse bekannt sind, und es soll die andere Kathete gefunden werden.

1. Aufl. Zeichne einen **R**; trage an einen Schenkel die gegebene Kathete; nimm die Hypotenuse in den Zirkel, setze an dem Puncte der Kathete, der nicht zugleich Scheitelpunct des **R** ist, ein, und durchschneide mittelst eines Bogens den andern Schenkel des **R**; die L. vom Durchschnittspuncte bis zum Scheitelpuncte des **R** ist die andere Kathete.

2. Aufl. Ziehe die Quadratzahl der bekannten Kathete von der Quadratzahl der bekannten Hypotenuse ab und suche von dem Reste die Quadratwurzel; sie giebt die Größe der andern Kathete an.

Zus. Ist a die Hypotenuse, b die eine und c die andere Kathete, so ist also $a^2 = b^2 + c^2$, folglich $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$; ferner $b^2 = a^2 - c^2$, folglich $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$; ferner ist $c^2 = a^2 - b^2$, folglich $c = \sqrt{(a^2 - b^2.)}$

B) Von der Verwandlung der Figuren.

§. 144. Erklärung.

Eine Figur in eine andere verwandeln, heißt eine Figur zeichnen, welche mit der gegebenen Figur gleichen Flächeninhalt hat.

§. 145. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein anderes gleich großes zu verwandeln.

Aufl. Ist das △ a b c (Fig. 183) gegeben, so ziehe durch einen Winkelpunct (c) des △ eine L. mit der gegenüberstehenden Seite parallel (d f || a b), so sind alle △, welche dieselbe Grundlinie haben und mit der der Grundlinie gegenüberliegenden Spitze in der parallelen Linie liegen, dem gegebenen △ a b c gleich, und es kann also dieses in ein rechtwinkliges, spitzwinkliges ꝛc. gleich großes △ verwandelt werden.

Beweis: §. 136 Zus. 1.

§. 146. Aufgabe.

Ein Dreieck a b c (Fig. 184) in ein anderes Dreieck von gleicher Größe zu verwandeln, dessen Spitze in einer Seite und dessen Grundlinie eine verlängerte Seite des gegebenen Dreiecks ist.

Aufl. Soll die Spitze des verlangten △ in d liegen, so ziehe d b und c e || d b; dann verlängere a b nach e und ziehe d e, so ist a e d das verlangte △.

Beweis: △ b d c = △ b d e (§. 136 Zus. 1), folglich sind die △ b d c + a d b = △ b d e + a d b (IV) oder △ a b c = △ a e d.

§. 147. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

1. Aufl. Ist d b e c (Fig. 185) das gegebene #, so ziehe die Diagonale c b, verlängere b d und mache a d = d b, so ist # d b e c = △ a b c.

2. Aufl. Verlängere (Fig. 186) eine Seite des # nach e, mache b e = a b und ziehe d e, so ist # a b c d = △ a e d.

Die Beweise fließen aus §. 136.

§. 148. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel zu verwandeln.

Aufl. Ist das gegebene # a b d c (Fig. 170) und der ∟ = x, so setze an a den ∟ x, d. h. mache ∟ e a b = ∟ x, verlängere c d in der Richtung nach f und ziehe b f || a e, so ist # a b f e = # a b d c. (Beweis §. 135.)

Zus. Umgekehrt kann jedes schiefwinklige # in ein rechtwinkliges verwandelt werden, wenn an a ein R angesetzt wird.

§. 149. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, zu welchem eine Seite gegeben ist.

Das gegebene # sei abcd (Fig. 175) und die gegebene Seite = x. Verlängere die 4 Seiten des # in der Richtung nach i, h, f, e, mache c e = x, ziehe durch d die L. e i und i g || b e und e g || b i, so ist # B = # A.

Beweis: §. 139.

§. 150. Aufgabe.

Jedes beliebige Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Aufl. Das gegebene Vieleck sei das Sechseck a b c d e f (Fig. 187). Ziehe eine Diagonale a e, wodurch das △ a f e abgeschnitten wird; ziehe dann g f || ae und verlängere b a nach g, so ist das Fünfeck g b c d e = dem Sechseck a b c d e f.

Beweis: △ g a e = △ a f e (§. 136 Zus. 1)

a b c d e + △ g a e = a b c d e + △ a f e (IV)

oder g b c d e = a b c d e f.

Zus. 1. Es ist also möglich, jedes Vieleck von beliebiger Seitenzahl durch fortgesetzte Anwendung dieses Lehrsatzes in ein △ und dieses wieder nach §. 151 in ein # zu verwandeln.

Zus. 2. Ist das Vieleck ein reguläres, so kann es nach §. 138 ganz leicht in ein gleich großes Dreieck verwandelt werden.

§. 151. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein gleich großes Parellelogramm zu verwandeln.

Aufl. Halbire a b in d (Fig. 185), ziehe c d und b e || c d und c e || a b, so ist △ a b c = # d b e c.

Beweis: §. 136.

Zus. 1. Soll das # einen bestimmten ∟ haben, so halbire a b in d, setze an d den gegebenen ∟ an und verfahre nach der Auflösung.

Zus. 2. Wird an d ein R angesetzt, so ist das # ein Rechteck, und es kann also jedes △ in ein gleich großes Rechteck verwandelt werden.

§. 152. Aufgabe.

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

1. Aufl. Das gegebene Rechteck sei a b c d (Fig. 188). Errichte auf der längeren Seite a b das □ a b e f, beschreibe über b e einen Halb-

kreis, verlängere d c nach g, ziehe b g und e g, so ist $\square$ b g h i = a b c d.

Beweis: $\llcorner$ b g e = R (§. 108. Zus. 5)

$$\overline{\quad b g^2 + g e^2 = b e^2 \quad}$$ (§. 140)

Da ferner d c senkrecht auf b e und d g || a b, so ist auch

$\square$ b g h i = a b c d (§. 140 und Fig. 176).

2. Aufl. Beschreibe über d c (Fig. 189) einen Halbkreis, mache d f = d a, errichte aus f einen Perpendikel, der den Halbkreis in e trifft und ziehe d e, so ist $d e^2$ = a b c d.

Beweis: $\llcorner$ d e c = R (§. 108 Zus. 5), folglich e f der von der Spitze des R auf die Hypotenuse gezogene Perpendikel (§. 141 a), daher ist $d e^2 = d c \times d a$ = a b c d (§. 141. Zus. 1).

Zus. Es kann also jede beliebige geradlinige Figur in ein Quadrat verwandelt werden, wenn man die gegebene Figur nach §. 150 in ein $\triangle$, dieses nach §. 151. Zus. 2 in ein Rechteck und dieses nach §. 152 in ein Quadrat verwandelt.

§. 153. Aufgabe.

Ein Trapez in ein Parellelogramm zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Trapez sei a b c d (Fig. 80). Halbire die nicht parallele Seite b c in f, verlängere d c nach h und ziehe durch f die L. g h || d a, so ist # a g h d = Trapez a b c d.

Beweis: §. 137.

§. 154. Aufgabe.

Ein Trapezoid in ein Parellelogramm zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Trapizoid sei a b c d (Fig. 190). Ziehe die Diagonale ac und durch d und b die Ll. e f und g h || a c; ziehe ferner durch c eine L. e g in beliebiger Richtung, doch so, daß die Ll. e f und g h in e und g durchschnitten werden; hierauf ziehe durch a eine L. f h || e g; halbire e f in i und ziehe i h || e g, so ist a b c d = # f h k i = # i k g e.

Beweis: $\triangle$ a d c = ½ a c e f, $\triangle$ a c b = ½ a h g c (§. 136)

$$\overline{\quad \text{a b c d} = \tfrac{1}{2}\,\text{f h g e} \quad}$$ (IV)

Da nun # f h k i = # i k g e = ½ # f h g e, so ist auch a b c d = # f h k i = # i k g e.

Uebungsaufgaben.

95) Zeichne 4 verschiedene # #, die alle einander gleich sind.

96) Zeichne 3 verschiedene $\triangle$, von denen aber ein jedes der Hälfte eines gegebenen # gleich ist.

97) Zeichne 3 △, die einander gleich sind, aber verschiedene Grundlinien und Höhen haben. (§. 136. Zus. 3 u. 4.)

98) Zeichne ein #, welches so groß ist, als ein gegebenes △.

99) Zeichne ein #, welches so groß ist, als ein gegebenes Trapez.

100) Zeichne ein Trapez, welches so groß ist, als ein gegebenes #.

101) Zeichne ein Trapez, welches einem andern Trapeze gleich, aber nicht congruent ist.

102) Zeichne ein gleichschenkliges △, welches einem gegebenen regelmäßigen Fünfecke gleich ist.

103) Zeichne ein Quadrat, welches der Summe und ein anderes Quadrat, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

104) Zeichne ein Rechteck, welches der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist.

105) Zeichne ein Quadrat, welches $\frac{1}{9}$ eines gegebenen Quadrates groß ist.

106) Zeichne ein Quadrat, welches 27 mal so groß ist, als ein gegebenes Quadrat.

107) Zeichne zwei verschiedene Quadrate, welche zusammen so groß sind, als ein gegebenes anderes Quadrat.

108) Zeichne ein Quadrat, welches so groß ist, als ein gegebenes △.

109) Verwandle ein gegebenes ungleichseitiges △ in ein gleichschenkliges, so aber, daß die Grundlinien gleich sind.

110) Verwandle ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck, dessen eine Seite gegeben ist.

111) Verwandle ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat.

112) Verwandle ein gegebenes Rechteck in ein gleichgroßes Rhomboid.

113) Verwandle ein gegebenes unregelmäßiges Sechseck in ein gleichgroßes Quadrat.

114) Verwandle ein gegebenes Trapezoid in ein gleichgroßes △.

XIV. Von den Verhältnissen der Linien und Figuren.

A) Von den Verhältnissen der Linien.

Anmerk. Aus der Zahlenlehre muß hier die ganze Lehre von den Proportionen vorausgesetzt werden.

§. 155. Erklärung.

a) Linien können nur hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen werden; untersuchen aber, wie oft eine bekannte Größe in einer unbekannten enthalten ist, heißt messen. Die bekannte, d. i. die wirkliche oder nach allgemeinem Uebereinkommen angenommene Größe, mit welcher eine unbekannte gemessen wird, heißt Einheit oder Maß.

b) Linien können als Größen ebenfalls in Proportion oder im Verhältniß zu einander stehen; doch ist hier nur von Verhältnissen der Linien die Rede, die von parallelen Linien durchschnitten werden.

§. 156. Lehrsatz.

Wenn eine Linie d e die Seiten eines Dreiecks (Fig. 191) mit der Grundlinie a b parallel durchschneidet, so verhält sich

$$cd : da = ce : eb$$
$$cd : ca = ce : cb$$
$$da : ca = eb : cb$$

Beweis: Wenn sich cd : da verhält wie 1 : 2, so ist c d in d a zweimal enthalten; halbire also d a in f und ziehe f g || a b und c a ist in

3 unter sich gleiche Theile getheilt und ebenso ist c b in 3 gleiche Theile getheilt (§. 80). Es verhält sich also

$$cd : da = 1 : 2$$
$$ce : eb = 1 : 2$$
$$cd : da = ce : eb,$$ d. h. es verhalten sich die oberen Abschnitte wie die unteren.

Ferner verhält sich: $cd : ca = 1 : 3$
$$ce : cb = 1 : 3$$
$$cd : ca = ce : cb,$$ d. h. es verhalten sich die oberen Abschnitte wie die ganzen Seiten.

Endlich verhält sich: $da : ca = 2 : 3$
$$eb : cb = 2 : 3$$
$$da : ca = eb : cb,$$ d. h. es verhalten sich die unteren Abschnitte wie die ganzen Seiten.

Zusatz. Die Grundlinie (Fig. 191 d e) des abgeschnittenen △ verhält sich zur Grundlinie (a b) des gegebenen △ (△ a b c) wie ein oberer Abschnitt (c d) zur ganzen Seite (c a).

Beweis: Es soll bewiesen werden, daß $de : ab = cd : ca$. Nimm von dem △ a b c die L. b c als Grundlinie an und ziehe $dh \parallel bc$; dann verhält sich $hb : ab = cd : ca$ (§. 156); da aber $de = hb$ (§. 73) so kann in der letzten Proportion statt h b auch d e gesetzt werden, und sie heißt dann $de : ab = cd : ca$.

Anmerk. Wenn auch die Linien nicht in die hier angenommenen Theile getheilt sind, sondern in andere, so gilt der Lehrsatz doch auch. Es liegt außerhalb dieses Buches von incommensurabeln Größen zu sprechen, d. h. von solchen, die durch ein Maß nicht vollständig gemessen, sondern deren Größen nur annäherungsweise durch Zahlen ausgedrückt werden können.

§. 157. Lehrsatz.

Wenn eine Linie zwei Seiten eines Dreiecks in proportionirte Theile theilt, so ist sie der dritten Seite parallel.

Beweis: Da dieser Lehrsatz nur eine Umkehrung des Lehrsatzes in §. 156 ist, so folgt die Wahrheit desselben schon aus dem Beweis zu §. 156.

§. 158. Lehrsatz.

Wenn der Winkel an der Spitze eines Dreiecks durch eine g. L. halbirt wird, so wird durch die Halbirungslinie die Grundlinie den Seiten des Dreiecks proportionirt getheilt.

Beweis: Ist in dem △ a b c (Fig. 192) ∟ m = ∟ n, so verhält sich also $ad : db = ac : cb$. Um nun den Beweis zu führen, verlängere a c und ziehe $be \parallel dc$; es ist nun ∟ n = ∟ m (Bed.), ∟ n = ∟ p (§. 30) und ∟ m = ∟ o (§. 27) folglich auch ∟ p = ∟ o (II) und deshalb

auch $ce = cb$ (§. 45. Zus. 2). Da aber in dem $\triangle abc$ die L. $dc \parallel be$, so verhält sich auch $ad : db = ac : ce$ (§. 156); nun ist aber $ce = cb$, folglich verhält sich auch $ad : db = ac : cb$.

§. 159. **Lehrsatz.**

In einem gleichseitigen Dreieck verhält sich die Seite zur Höhe wie 1000:866.

Beweis: Wenn in einem gleichseitigen $\triangle$ (Fig. 193) eine Seite $ab = 1$ gesetzt wird, so ist, wenn aus c der Perpendikel cd gezogen wird, $ad = db$, und $ad = \frac{1}{2}$ und $db = \frac{1}{2}$ (§. 54. Zus. 2). Nun ist aber $db^2 = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; db ist aber eine Kathete des rechtwinkligen $\triangle bdc$, und man findet also die andere Kathete, wenn man von dem Quadrate der Hypotenuse den Inhalt des Quadrates der einen Kathete abzieht und aus dem Reste die Quadratwurzel zieht (§. 143); bc^2 ist aber $1 \times 1 = 1$ und also $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ = dem Inhalte von dc^2 und folglich die Quadratwurzel daraus $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$. Folglich ist die Höhe eines gleichschenkligen $\triangle = 0{,}866$, wenn eine Seite des $\triangle = 1$ ist, oder die Seite des $\triangle$ verhält sich zur Höhe wie $1 : 0{,}866$ oder wie $1000 : 866$, oder die Höhe ist $\frac{866}{1000}$ von einer Seite.

B) Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 160. **Erklärungen.**

a) Man wendet den Begriff der Aehnlichkeit überhaupt nur bei begrenzten Flächen (Figuren) und bei Körpern an, weil z. B. alle g. Ll. gleiche Form haben und ähnliche Winkel immer auch gleich sein müssen. Figuren sind ähnlich, wenn sie gleiche Form haben.

b) Geradlinige Figuren haben aber dann gleiche Form, wenn ihre Winkel der Reihe nach gleich und ihre Seiten von verhältnißmäßiger Größe sind, oder wenn ihre Seiten in Proportion stehen. Dreiecke sind also ähnlich, wenn sie der Ordnung nach gleiche Winkel und proportionirte Seiten haben und Vielecke, wenn sie ebenfalls in allen Winkeln und in dem Verhältniß der gleichliegenden Seiten übereinstimmen.

§. 161. **Lehrsatz.**

Wenn man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele zieht, so ist das kleinere Dreieck dem größeren ähnlich.

Beweis: Ist in Fig. 194 $de \parallel ab$, so ist auch $\angle o = \angle m$ (§. 27), $\angle p = \angle n$ (§. 27), $\angle q = \angle q$, ferner

$$\left.\begin{array}{l} cd : ca = ce : cb \\ cd : de = ca : ab \end{array}\right\} \text{(§. 156)}$$

u. s. w.

Da nun in beiden △ die 3 ∠ der Ordnung nach gleich sind und die Seiten in Proportion stehen, so ist △ d e c ∾ △ a b c (§. 160).

Zus. Wenn in einem △ eine L. zwei Seiten in proportionirte Theile theilt, so ist diese L. zur dritten Seite || und das abgeschnittene kleinere △ ist dem größern ähnlich.

Anmerk. 1. Auf diesen Lehrsatz stützt sich eine andere Auflösung der in §. 83 enthaltenen Aufgabe: Ist (Fig. 195) die L. A etwa in 9 Theile zu theilen, so trage auf eine L. a b > A neun gleiche, aber beliebig große Theile auf; zeichne auf a b das gleichseitige △ a b c und ziehe von den Theilungspuncten g. Ll. nach c. Mache c d = c e = A und ziehe d e, so ist d e = A und in die verlangten Theile getheilt; denn △ d e c ∾ △ a b c, weil d e || a b; also stehen auch die Seiten und ihre Theile in Proportion u. s. w. Sollte übrigens A > a b (Fig. 195) sein, so verlängere c a und c b so weit, daß die gegebene L. A auf dieselben aufgetragen werden kann, und verlängere dann gleichfalls die von c durch die Theilungspuncte laufenden Linien.

Anmerk. 2. Auch folgende Aufgabe kann mit Hilfe dieses Lehrsatzes gelöst und bewiesen werden: „Ein gleichseitiges △ zu zeichnen, von dem blos die Höhe (= A) bekannt ist." Zeichne ein beliebiges gleichseitiges △ a b c (Fig. 196), fälle von c aus einen Perpendikel und mache ihn = der gegebenen Höhe, also c d = A; ziehe ferner durch d die L. e f || a b und verlängere c a und c b nach e und f, so ist e f c das verlangte △. Der Beweis fließt aus §. 161.

Anmerk. 3. Auch folgende Aufgabe: „Ein gleichschenkliges △ zu zeichnen, von dem blos die Grundlinie A und der der Grundlinie gegenüber liegende ∟ x gegeben sind." Ziehe (Fig. 197) eine g. L. a b = A und errichte aus dem Halbirungspuncte g den Perpendikel g c, setze an einen Punct d des Perpendikels den ∟ n = $\frac{1}{2}$ x und ∟ m = $\frac{1}{2}$ x an, und ziehe d e und d f und mit diesen Ll. || a c und b c, so ist a b c das verlangte △. — Beweis: §. 161.

§. 162. Lehrsatz. (Erster Fall.)

Wenn in einem Dreieck zwei einzelne Winkel gleich sind zwei einzelnen Winkeln eines andern Dreiecks, so sind die beiden Dreiecke einander ähnlich.

Beweis: Es ist vorausgesetzt, daß in Fig. 198 ∟ a = ∟ A und ∟ b = ∟ B ist; mache nun D G = d f und D H = d e; dann ist △ d e f ≌ D H G (§. 48), folglich ist auch ∟ m = ∟ c und ∟ n = ∟ b (§. 50. Zus. 3). Da aber ∟ B = ∟ b (Bed.), so ist auch B = ∟ n (II) und daher G H || F E (§. 27). Folglich stehen auch die Seiten in Proportion (§. 161) und △ d e f (≌ D H G) ∾ △ D E F.

Zus. 1. In ähnlichen $\triangle$ stehen gleichen $\angle\angle$ proportionirte Seiten gegenüber.

Zus. 2. Zwei gleichschenklige $\triangle$ sind schon ähnlich, wenn sie in den Winkeln an der Spitze oder in einem Winkel an der Grundlinie übereinstimmen.

§. 163. Lehrsatz. (Zweiter Fall.)

Wenn in einem Dreieck ein Winkel gleich ist einem Winkel eines andern Dreiecks, und wenn in beiden Dreiecken die Seiten, welche den Winkel bilden, in Proportion stehen, so sind die beiden Dreiecke einander ähnlich.

Beweis: Es ist vorausgesetzt, daß in Fig. 198 $\angle a = \angle A$ und $df : DF = de : DE$; mache nun $DG = df$ und $DH = de$; dann ist $\triangle def \cong \triangle DHG$ (§. 48), folglich ist $fe = GH$ (§. 50. Zus. 3). Da aber DG $(= df) : DF = DH\ (= de) : DE$, so ist $GH \parallel FE$ (§. 161. Zus.) und $\triangle DHG \sim \triangle DEF$ (§. 161); nun ist aber $\triangle DHG \cong \triangle def$, folglich auch $\triangle def \sim \triangle DEF$ und $\angle c = \angle C$ und $\angle b = \angle B$.

Zus. In ähnlichen $\triangle$ stehen proportionirten Seiten gleiche $\angle\angle$ gegenüber.

§. 164. Lehrsatz. (Dritter Fall.)

Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten der Ordnung nach in Proportion stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis: Es ist vorausgesetzt, daß in Fig. 198 $de : DE = df : DF = fe : FE$; mache nun $DG = df$ und $DE = de$ und ziehe GH; folglich $DG : DF = DH : DE$ und $GH \parallel FE$ (§. 161. Zus.) und $\triangle DHG \sim \triangle DEF$ (§. 161). Nach der Bedingung ist $df : DF = fe : Fe$;
da aber $df = DG$, so verhält sich auch $DG : DF = fe : FE$ und da ferner

$$\begin{array}{l} DG : DF = GH : FE \\ \hline fe : FE = GH : FE \text{ (§. 156)} \\ \hline fe = GH \text{ (V)} \end{array}$$

Da nun $DG = df$ und $DH = de$ (Vers.) und auch $GH = fe$, so ist auch $\triangle DHG \cong \triangle def$, und wenn $\triangle DHG \sim \triangle DEF$, so ist auch $\triangle def \sim \triangle DEF$.

§. 165. Lehrsatz.

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die gleichliegenden Seiten der Dreiecke.

Beweis: Ist in Fig. 196 $\triangle abc \sim \triangle efc$, so ist

$$\begin{array}{l} \angle cab = \angle cef \\ \angle aoc = \angle edc \text{ (§. 161 und §. 27)} \\ \hline \triangle edc \sim \triangle aoc \text{ (§. 162)} \end{array}$$

folglich verhält sich c d : c o = c e : c a; da aber wegen der Aehnlichkeit der △ a b c und e f c auch c e : c a = e f : a b, so kann für c e : c a auch e f : a b gesetzt werden, und es verhält sich also c d : c o = e f : a b; d. h. in ähnlichen △ verhalten sich die Höhen wie die gleichliegenden Seiten (also auch wie die Grundlinien).

§. 166. Lehrsatz.

Wenn ähnliche Vielecke aus gleichliegenden Ecken durch Diagonalen in Dreiecke zerschnitten werden, so sind die entstandenen Dreiecke einander ähnlich.

Beweis: Sind (Fig. 199) die Fünfecke A B C D E und A b c d e einander ähnlich und werden sie von A aus in △ zertheilt, so läßt sich die Aehnlichkeit der einzelnen △ nach §. 163 leicht erweisen; denn vergleichen wir das △ A e d mit dem △ A E D, so ist wegen der Aehnlichkeit beider Fünfecke ∟ e = ∟ E und A e : A E = e d : E D; folglich ist △ A e d ∾ △ A E D (§. 163) u. s. w. Sind nun die einzelnen △ ähnlich, so stehen auch die ähnlich liegenden Diagonalen in Proportion, und es werden daher Vielecke durch ähnlich liegende Diagonalen in ähnlich liegende △ getheilt.

Zus. 1. Wenn in zwei Vielecken die durch Diagonalen entstandenen △ der Ordnung nach ähnlich sind, so sind also die Vielecke selbst ähnlich.

Zus. 2. Da in regelmäßigen Figuren von gleicher Art alle Winkel und auch die Seiten einer jeden Figur unter sich gleich sind, so folgt, daß alle regelmäßigen Figuren gleicher Art einander ähnlich sind; also alle gleichseitigen △, alle Quadrate, alle reguläre Fünfecke u. s. w., und nach §. 138 Zus. auch alle Kreise.

§. 167. Lehrsatz.

Die Radien der umschriebenen Kreise A c und a c (Fig. 200 u. 201) und die Radien der eingeschriebenen Kreise D C und d c verhalten sich in in regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl wie ein Paar Seiten.

Beweis: Die △ A B C und a b c sind gleichschenklig, weil A C = B C u. s. w. (§. 14. Zus 1), und da auch ∟ A C B = ∟ a c b (§. 89. Zus. 2), so ist △ A B C ∾ △ a b c (§. 163), und es verhält sich

A C : a c = A B : a b

und auch C D : c d = A B : a b (§. 165)

Zus. 1. Da bei regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl jede Seite der gleichgroße Theil des ganzen Umfanges ist und da die Vielecke selbst ähnlich sind, so verhalten sich die ganzen Umfänge nothwendig wie ein Paar Seiten.

Zus. 2. Da aber auch die Radien sowohl des eingeschriebenen, als des umschriebenen Kreises sich wie ein Paar Seiten verhalten, so verhalten sich die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl ebenfalls wie diese Radien.

Zus. 3. Betrachtet man den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten (§. 138. Zus.), so verhalten sich auch die Umfänge zweier Kreise wie die Radien, d. h. die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser.

Anmerk. Soll also ein Kreis gezeichnet werden, dessen Peripherie 2, 3... oder n mal größer sein soll, als die eines gegebenen Kreises, so braucht man blos den Durchmesser 2, 3... oder n mal zu nehmen, diese Länge als den Durchmesser des verlangten Kreises zu betrachten und dann die Peripherie zu ziehen.

§. 168. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck von der Spitze des **R** auf die Hypotenuse einen Perpendikel zieht (§. 141), so sind 1) die zwei neuen Dreiecke unter sich und dem ganzen Dreieck ähnlich und 2) die senkrechte L. ist die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypotenuse.

Beweis zu 1: Es wird vorausgesetzt, daß (Fig. 202) ∟ (p + o) = **R** und a c senkrecht auf b d ist; dann ist

∟ (p + o) = **R** (Bed.)
∟ n = **R** (Bed. u. §. 19)
∟ (p + o) = ∟ n (II)
∟ q = ∟ q
△ a b c $\sim$ d b a (§. 162)
ferner
∟ (p + o) = **R** (Bed.)
∟ m = **R** (Bed. u. §. 19)
∟ (p + o) = ∟ m (II)
∟ r = ∟ r
△ d a c $\sim$ △ d b a (§. 162)
∟ o = ∟ r (§. 160 b).

ferner ist ∟ n = ∟ m (§. 20. Zus. 4)
und ∟ o = ∟ r
△ a b c $\sim$ △ d c a (§. 162)

Beweis zu 2:
△ d c a $\sim$ △ a b c
c b : a c = a c : d c (§. 164)

Zus. Folglich wird zu zwei gegebenen g. Ll. c b und d c (Fig. 202) die mittlere Proportionallinie a c gefunden, wenn man die beiden gegebenen Ll. in eine g. L. b d zusammensetzt, dieselbe als einen Durchmesser betrachtet, aus seinem Mittelpuncte einen Halbkreis zieht und aus dem Vereinigungspuncte c einen Perpendikel c a bis an die Peripherie errichtet; denn es ist c b : a c = a c : d c.

C) Von den Verhältnissen der Figuren.

§. 169. Lehrsatz.

Rechtecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis: Ist (Fig. 203) die Linie e f = 2 gleichen Theilen und die L. a b = 3 solchen Theilen, so verhält sich also a b : e f = 3 : 2. Werden nun aus den Theilungspuncten Linien || mit den Höhen gezogen, so wird das erste Rechteck in 3, das zweite in 2 kleinere Rechtecke getheilt, welche nach §. 135 alle unter sich gleich sind; folglich verhält sich auch

a b c d : e f g h = 3 : 2 und somit

a b c d : e f g h = a b : e f.

Anmerk. Hier gilt auch die Anmerk. zu §. 156.

§. 170. Zusätze.

1) Rechtecke mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; denn betrachte (Fig. 203) a d und e h als die Grundlinien und a b und e f als die Höhen, so gilt der vorhergehende Beweis.

2) Parallelogramme mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien, und Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; denn jedes Parallelogramm, welches mit dem Rechtecke gleiche Grundlinie und Höhe hat, ist auch so groß, als das Rechteck (§. 135).

3) Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien und mit gleichen Grundlinien verhalten sie sich wie ihre Höhen; denn jedes Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. (§. 136).

4) Da nach §. 108. Zus. 1 die Größe eines Centriwinkels durch den Bogen bestimmt wird, auf dem seine Schenkel stehen, so verhalten sich sowohl die Bogen, als die Ausschnitte desselben Kreises wie die Centriwinkel, die dazu gehören.

§. 171. Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Beweis: In Fig. 204 seien die ähnlichen △ A B C und a b c. Um nun den Lehrsatz zu beweisen, errichte sowohl über A B, als über a b ein Quadrat und ziehe D E || A B und d e || a b. Nun verhält sich

C H : c h = A B : a b (§. 165) oder da C H = A D und c h = a d (Verf.) so verhält sich A D : a d = A B : a b; folglich verhält sich auch

A B E D : A B G F = A D : A F (§. 170), oder da A F = A B, so verhält sich auch A B E D : A B G F = A D : A B

und a b e d : a b g f = a d : a b; und es verhält sich auch

A B E D : A B G F = a b e d : a b g f; oder da A B G F = AB^2 und a b g f = ab^2:

so verhält sich A B E D : AB^2 = a b e d : ab^2 oder

ABED : abed = $AB^2 : ab^2$ *). Da aber △ ABC = ½ Rechteck ABED u. △ abc = ½ Rechteck abed (§. 136), so verhält sich auch △ABC : △abc = $AB^2 : ab^2$.

§. 172. Lehrsatz.

Werden auf die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren gezeichnet, so sind die Figuren auf den beiden Katheten gleich der Figur auf der Hypotenuse.

Beweis: In Fig. 205 verhalten sich die ähnlichen Fünfecke wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten (§. 171). Nach §. 140 ist aber das Quadrat der Hypotenuse = den Quadraten der Katheten; folglich muß auch das Fünfeck auf der Hypotenuse so groß sein, als die Summe der beiden Fünfecke auf den Katheten.

Zus. Da nach §. 166. Zus. alle Kreise einander ähnlich sind, so gilt dieser Lehrsatz auch für Kreise. Betrachtet man nämlich die drei Seiten eines rechtwinkligen △ als Radien oder als Durchmesser und beschreibt man mit ihnen Kreise, so ist der mit der Hypotenuse beschriebene so groß, als die mit den beiden Katheten beschriebenen Kreise zusammengenommen.

Anmerk. Wenn nun eine Figur gezeichnet werden soll, die zwei gegebenen ähnlichen Figuren ähnlich und gleich ist, so braucht man nur von jeder gegebenen Figur eine Seite, also von beiden Figuren zwei Seiten rechtwinklig zusammenzusetzen, die Hypotenuse zu ziehen und auf derselben eine ähnliche Figur zu zeichnen. Ebenso ist es mit Kreisen, wenn ihre Durchmesser unter einem R aneinander gesetzt werden und die Hypotenuse gezogen wird.

D) Aufgaben.

§. 173. Aufgabe.

Den Durchschnittspunct x von zwei g. Ll. zu bestimmen, welche sich unter sehr spitzigen Winkeln schneiden.

Aufl. Errichte (Fig. 206) auf ab an den Puncten a und b Perpendikel, welche die andere schneidende L. in c und d treffen, trage ac so oft auf ae, als bd auf bf und ziehe fe, so geht diese L. durch den Durchschnittspunct x.

Beweis: Mache xg = xa und xh = xc, so ist △ acx ≅ △ ghx (§. 48), folglich gh = ac, und da die ∠ an diesen Seiten der beiden △ gleich sind, auch gh || ac (§. 30), folglich gh ein Perpendikel auf ab und deshalb auch gh || bf (§. 32. Zus. 3) und △ acx (= △ ghx) ∾ △ bdx

*) Die Glieder einer geometrischen Proportion können bekanntlich mit sich multiplicirt oder durch die Glieder einer andern Proportion der Ordnung nach dividirt oder auch vertauscht werden, ohne daß das Verhältniß aufgehoben wird.

(§. 161) und daher $ax:ac = bx:bd$. Wird nun $ae = n \times ac$ und bf auch $= n \times bd$ gemacht, so verhält sich auch $ax:ae = bx:bf$ und $\triangle axe \backsim \triangle bxf$ (§. 161) und fe muß also durch x gehen.

§. 174. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Geraden **A** und **B** die dritte Proportionallinie **C** zu finden.

Aufl. Siehe §. 168. Zus. oder trage (Fig. 207) auf den Schenkel df eines beliebigen $\llcorner$ (fdh) $de = A$ und $df = B$, auf den andern Schenkel $dg = B$, ziehe eg und $fh \parallel eg$, so ist dh die dritte Proportionallinie, d. h. $de:dg = df:dh$ oder $A:B = B:C$. (Beweis §. 161.)

§. 175. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Geraden **A**, **B** und **C** die vierte Proportionallinie **D** zu finden.

Aufl. Zeichne (Fig. 207) einen beliebigen $\llcorner$ fdh, trage auf den einen Schenkel $de = A$ und $df = C$, auf den andern Schenkel $dg = B$, ziehe eg und $fh \parallel eg$, so ist dh die vierte Proportionallinie, d. h. $de:dg = df:dh$ oder $A:B = C:D$. (Beweis §. 161.)

§. 176. Aufgabe.

Eine gegebene Gerade so zu theilen, daß die Theile in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen.

Aufl. Soll die L. ab (Fig. 208) so getheilt werden, daß die Theile in dem Verhältnisse stehen, wie $1:2:3:4$, so ziehe an a eine beliebige L. ac und mache $ad = 1$, $de = 2$, $ef = 3$, $fc = 4$ beliebigen, aber gleichen Theilen, ziehe cb und mit ihr $\parallel$ die Ll. fi, eh, dg, dann verhält sich

$$ag:gh = ad:de$$

Da aber $ad = 1$ Theil und $de = 2$ Theilen

$$ag:gh = 1:2$$

u. s. w.

Beweis: §. 161.

Zus. Soll eine Gerade ab (Fig. 208) so getheilt werden, daß sich die Theile verhalten, wie eine beliebige Anzahl verschiedener anderer Linien, so mache die Theile der Hilfslinie ad, de u. s. w. den gegebenen Ll. gleich und verfahre nach der Auflösung.

§. 177. Aufgabe.

Auf einer gegebenen Geraden ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Aufl. 1. Ist AB (Fig. 209) die gegebene Linie und abc das gegebene △, so mache ∟ p = ∟ m und ∟ q = ∟ r und verlängere die Schenkel, daß sie sich durchschneiden, so ist △ ABC ∾ △ abc (Beweis §. 162).

Aufl. 2. Mache ∟ p = ∟ m und suche zu ab, ac und AB die vierte Proportionallinie (AC), so daß ab : ac = AB : AC und ziehe CB, so ist △ ABC ∾ △ abc (Beweis: §. 163).

§. 178. Aufgabe.

Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich ist.

1. Aufl. Theile das gegebene Vieleck durch Diagonalen in △ und zeichne der Ordnung nach △, welche diesen ähnlich sind. (Beweis: §. 166. Zus. 1.)

2. Aufl. Ist (Fig. 199) ABCDE das gegebene Vieleck, so ziehe von einem Eckpuncte (A) aus Diagonalen und bc || BC; cd || CD; de || DE. (Beweis: §. 161.)

Zus. Folglich sind zwei geradlinige Figuren einander ähnlich, wenn ihre ∟∟ der Ordnung nach gleich sind und ihre Seiten in Proportion stehen.

3. Aufl. Nimm (Fig. 210) innerhalb der gegebenen Figur ABCDE einen beliebigen Punct o an, ziehe von hier aus Diagonalen in die Ecken und ab || AB; bc || BC u. s. w. (Beweis: §. 161.)

Zus. Mit Hilfe dieser Auflösungen sind geradlinige Figuren leicht zu vergrößern oder zu verkleinern; denn soll eine Figur gezeichnet werden, die 2, 3, 4 u. s. w. oder $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ u. s. w. mal so große Seiten haben soll, als eine gegebene Figur, so mache die Diagonalen 2, 3, 4 oder $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ mal so lang, als sie in der gegebenen Figur sind.

Uebungsaufgaben.

115) Theile eine g. L. so, daß ihre Theile sich verhalten wie 2 : 4$\frac{1}{2}$.

116) Ziehe zwei Ll., die sich zu einander verhalten wie $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{5}$.

117) Ziehe zwei Ll. a und b so, daß a $\frac{3}{6}$ der L. b groß ist.

118) Theile eine gegebene g. L. so, daß ihre Theile sich verhalten wie die Zahlen $\frac{1}{2}$, 3, 4$\frac{1}{2}$.

119) Theile eine gegebene g. L. in zwei beliebige Theile, in a und b; ziehe nun eine andere L. und theile sie, daß ihre Theile sich auch so verhalten wie a und b.

120) Zeichne 6 gleiche Parallelen, deren Entfernungen sich verhalten wie die Zahlen 1, 1$\frac{1}{2}$, 2, 2$\frac{1}{2}$, 3.

121) Zeichne 4 Parallelen a, b, c, d, von welchen a zu b sich verhält, wie $\frac{1}{4}$: $\frac{3}{4}$; b : c = $\frac{1}{2}$: 1; c : d = 1 : 2.

122) Zeichne drei △ von verschiedener Größe, die aber alle einem gegebenen △ ähnlich sind.

123) Zeichne ein △, von welchem sich die Seiten verhalten wie die Zahlen 3, 4, 5.

124) Zeichne 2 △, welche einem gegebenen ähnlich sind, das eine größer, das andere kleiner, als das gegebene.

125) Zeichne ein Vieleck, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist, der Umfang soll aber um die Hälfte kleiner sein, als der Umfang des gegebenen Vielecks.

126) Zeichne ein regelmäßiges Sechseck, welches so groß ist, als zwei andere gegebene regelmäßige Sechsecke.

127) Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck, welches der Differenz zweier anderer regelmäßiger Fünfecke gleich ist.

128) Zeichne ein gleichseitiges △, welches so groß ist, als zwei andere gegebene gleichseitige △.

129) Zeichne ein Quadrat, welches so groß ist, als die Differenz zweier anderer gegebener Quadrate.

130) Zeichne einen Kreis, welcher der Summe, und einen andern Kreis, welcher der Differenz zweier gegebener Kreise gleich ist.

131) Zeichne einen Kreis, dessen Fläche dreimal so groß ist, als ein gegebener Kreis.

132) Zeichne ein Rechteck, welches mit einem gegebenen Rechtecke x gleiche Höhe hat, das aber $2\frac{1}{2}$ mal größer ist, als x.

133) Zeichne 2 Rechtecke von gleicher Grundlinie, die sich aber hinsichtlich ihrer Größe verhalten sollen, wie 2 : 3.

134) Zeichne 3 ⌗ ⌗ von gleicher Höhe, deren Größen sich aber verhalten sollen, wie die Zahlen 1, 2, 3.

135) Zeichne 4 △ von gleicher Höhe, von denen das zweite noch einmal so groß, als das erste, das dritte $\frac{1}{3}$mal so groß, als das zweite und das vierte $2\frac{1}{2}$ mal so groß ist, als das dritte.

136) Suche zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionallinie.

137) Suche zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie.

XV. Aufgaben über die Theilung der Figuren.

§. 179. Aufgabe.

Ein Dreieck von der Spitze aus in n gleiche Dreiecke zu theilen.

Aufl. Theile die Grundlinie (nach §. 83 oder §. 161. Anmerk. 1) in n gleiche Theile und ziehe von den Theilungspuncten g. Ll. in die Spitze des △.

Beweis: Ist a b (Fig. 211) in n (hier 4) gleiche Theile getheilt, so haben sämmtliche △ gleiche Grundlinien und gleiche Höhen und sind also einander gleich; folglich ist jedes △ der nte Theil vom △ a b c; oder beweise so: △ a b c : △ a d c = a b : a d (§. 170. 3); da aber a b : a d = 4 : 1, so verhält sich auch △ a b c : △ a d c = 4 : 1; daher ist △ a d c = $\frac{1}{4}$ a b c u. s. w.

Zus. Soll ein △ in irgend einem Verhältniß, etwa 2 : 4 : 5 : 7, getheilt werden, so theile die Grundlinie nach diesem Verhältniß (§. 176) und ziehe aus den Theilungspuncten g. Ll. in die Spitze des △. Der Beweis stützt sich auf die §§. 176 u. 170.

§. 180. Aufgabe.

Ein Dreieck von einem Puncte der Grundlinie als Theilungspunct in n gleiche Dreiecke zu theilen.

Aufl. Soll △ a b c (Fig. 212) in n (hier 5) gleiche Theile getheilt werden, so theile die Grundlinie a b in n gleiche Theile und die L. b c in n — 1 (hier 4) gleiche Theile und ziehe von d aus eine g. L. nach c und nach den Theilungspuncten der L. b c.

Beweis: a d : a b = 1 : 5, d. h. △ a d c = $\frac{1}{5}$ △ a b c; folglich ist △ d b c = $\frac{4}{5}$; wird nun b c als Grundlinie des △ d b c betrachtet und

nach §. 179 in 4 gleiche △ getheilt, so ist △ c e d = △ e f d = △ f g d △ g b d = $\frac{1}{4}$ △ d b c = $\frac{1}{5}$ △ a b c. Da nun jedes der fünf kleineren △ = $\frac{1}{5}$ des △ a b c, so ist dieses △ in die verlangten gleichen Theile getheilt.

§. 181. Aufgabe.

Ein Dreieck von einem beliebigen Puncte der Grundlinie aus in n gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Ist das △ a b c (Fig. 213) von dem Puncte d aus in n (hier 4) gleiche Theile zu theilen, so theile a b in n gleiche Theile, ziehe c d und aus den Theilungspuncten der L. a b Linien || c d. Dadurch werden auf den beiden andern Seiten des △ Puncte (h, i, k) bezeichnet; von diesen ziehe g. Ll. nach dem beliebig angenommenen Puncte d.

Beweis: △ a e c = △ e f c = △ f g c = △ g b c = $\frac{1}{4}$ △ a b c (§. 179). Nun ist aber 1) △ a e c = △ a h d; denn △ a h e ist beiden △ gemeinschaftlich und △ e h c = △ e h d (§. 136. Zus. 1); also ist auch △ a h d = $\frac{1}{4}$ △ a b c. Ferner ist 2) △ e f c = △ h d i; denn △ a c f = $\frac{2}{4}$ △ a b c = △ a i d, weil △ a i f beiden △ gemeinschaftlich ist und weil ferner △ f i c = △ f d c (§. 136. Zus. 1). Also ist

△ a c f = △ a i d; da aber schon
△ a e c = △ a h d

△ a c f — △ a e c = △ a i d — a h d (V)
d. h. △ e f c = △ h d i = $\frac{1}{4}$ △ a b c.

Ferner ist 3) △ g b c = △ d b k; denn △ g b k ist beiden △ gemeinschaftlich und △ d g k = △ g k c (§. 136. Zus. 1); also ist auch △ g b c = d b k = $\frac{1}{4}$ △ a b c.

Da nun die 3 △ a h d + h d i + d b k = $\frac{3}{4}$ △ a b c sind, so muß auch das Viereck d i c k = $\frac{1}{4}$ △ a b c sein, und das △ a b c ist also in 4 gleiche Theile getheilt.

§. 182. Aufgabe.

Ein Dreieck in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von einer Seite zur andern, aber nicht parallel laufen.

Aufl. u. Beweis: Theile eine Seite des △ a b c (Fig. 214), etwa a b, in n (hier 5) gleiche Theile, so daß a d = $\frac{1}{5}$ a b und ziehe c d, so ist △ a d c = $\frac{1}{5}$ △ a b c und △ d b c = $\frac{4}{5}$ △ a b c (§. 180). Theile nun c b in n — 1 (hier 4) gleiche Theile so, daß c e = $\frac{1}{4}$ c b und ziehe d e, so ist △ d e c = $\frac{1}{4}$ △ d b c = $\frac{1}{5}$ △ a b c und also △ d b e = $\frac{3}{5}$ △ a b c. Theile nun d b in n — 2 (hier 3) gleiche Theile, so daß d f = $\frac{1}{3}$ d b und ziehe e f, so ist △ d f e = $\frac{1}{3}$ △ d b e = $\frac{1}{5}$ △ a b c und △ f b e = $\frac{2}{5}$ △ a b c. Theile endlich e b in n — 3 (hier 2) gleiche Theile, so ist auch △ f e g = $\frac{1}{5}$ und △ f b g = $\frac{1}{5}$ △ a b c, und somit ist das △ a b c in n (hier 5) gleiche Theile getheilt.

§. 183. Aufgabe.

Ein Dreieck von einem Puncte (x) der Fläche in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Halbire a b (Fig. 215) in d und ziehe d c, so ist △ a d c = △ d b c (§. 179), ziehe ferner x d und c e || x d und endlich die Linie c x und x e, so ist △ d b c = Viereck e b c x.

Beweis: △ e b c ist beiden Figuren gemeinschaftlich und △ e c x = △ e c d (§. 136. Zus. 1), folglich ist d b c = e b c x, und da △ d b c = $\frac{1}{2}$ △ a b c = Viereck e b c x, so ist auch Viereck e b c x = Viereck a e x c = $\frac{1}{2}$ △ a b c.

§. 184. Aufgabe.

Ein Dreieck durch eine Gerade, welche mit einer Seite parallel läuft, in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Halbire a b (Fig. 216) in d, ziehe aus d mit d a als Halbmesser den Halbkreis a e b und aus d den Perpendikel d e, mache a f = a e und ziehe aus f die Linie f g || b c, so ist △ a f g = $\frac{1}{2}$ △ a b c.

Beweis: Da a f = a e, so ist auch $af^2 = ae^2$ (IV). Da aber auch a d = d e (§. 14. Zus. 1) und $ae^2 = (ad^2 + de^2)$ (§. 140), so ist auch $ae^2 = 2\,ad^2$ und also auch $af^2 = 2\,ad^2$. Nun ist aber a b = 2 a d und demnach $ab^2 = 4\,ad^2$ und da ferner

△ a f g : △ a b c = $af^2 : ab^2$ (§. 171); so verhält sich
$af^2 : ab^2 = 2\,ad^2 : 4\,ad^2$
= 2 : 4 oder 1 : 2

oder △ a f g : △ a b c = 1 : 2, d. h. △ a f g = $\frac{1}{2}$ △ a b c.

Zus. 1. In derselben Weise kann ein △ auch in n gleiche Theile getheilt werden. Wenn z. B. △ a b c (Fig. 217) in n (hier 5) gleiche Theile getheilt werden soll, so errichte auf a b einen Halbkreis, theile a b in n (hier 5) gleiche Theile, errichte aus den Theilungspuncten Perpendikel, welche die Peripherie in den Puncten d, e, f, g berühren, mache dann a h = a d, a i = a e, a k = a f, a m = a g und ziehe aus den Puncten h, i, k, m Linien || b c. Der Beweis kann wie der vorhergehende geführt werden. Der größeren Deutlichkeit wegen zeichne Fig. 217 so, wie Fig. 218.

Zus. 2. Folglich kann auch die §. 142. Zus. 4 berührte Aufgabe, ein □ zu zeichnen, das nur ein Bruchtheil eines andern gegebenen □ ist, leichter auch auf folgende Art gelöst werden: soll z. B. ein □ gezeichnet werden, welches nur $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{5}$mal so groß sein soll, als das gegebene □ a b c d (Fig. 219), so ziehe eine Diagonallinie b d, theile nun nach §. 184. Zus. 1 das eine △ (△ b c d) in 5 (allgemein in n = dem Nenner des Bruches) gleiche Theile und durch die Ll. f g, i k u. s. w. || a d auch das andere △,

so ist □ g b e f $= \frac{1}{5}$ und □ k b h i $= \frac{2}{5}$ u. s. w. des □ a b c d. Der Beweis ist leicht zu führen.

§. 185. Aufgabe.

In einem Dreieck einen Punct zu finden, von welchem gerade Linien in die Ecken das Dreieck in drei gleiche Theile theilen.

Aufl. Halbire im △ g h i (Fig. 220) jede Seite und ziehe von den Halbirungspuncten g. L. in die gegenüberstehenden Ecken. Der Durchschnittspunct dieser Ll. ist der gesuchte Punct.

Beweis: △ f = △ e; △ a = △ b; △ c = △ d (§. 170. 3);
da aber auch △ (f + a + b) = △ (e + d + c) (§. 170. 3)
△ (a + b) = △ (d + c) (V).
Da ferner △ (a + b + c) = △ (f + e + d) (§. 170. 3)
△ (a + b) = △ (f + e) (V).

Da nun △ (a + b) = △ (d + c) = △ (f + e), so ist jedes △ = $\frac{1}{3}$ △ g h i.

§. 186. Aufgabe.

Ein Dreieck in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit 2 Seiten des Dreiecks parallel laufen.

Aufl. Halbire a b (Fig. 221) in d und ziehe c d; dann ist △ a d c = △ d b c (§. 179 u. 170), theile nun das eine der △, (etwa d b c) nach §. 184. Zus. 1 in n (hier 4) gleiche Theile und ziehe aus den Puncten h, i, k Linien || c a, so wird auch das △ a d c in n gleiche Theile getheilt, und es ist also m h e $= \frac{1}{4}$ △ a b c und n m h e f i $= \frac{1}{4}$ △ a b c u. s. w.

Beweis: Da △ d e h $= \frac{1}{4}$ △ d b c, so ist auch △ d e h $= \frac{1}{8}$ △ a b c; ebenso ist △ m d h $= \frac{1}{8}$ △ a b c; folglich sind die △ (d e h + m d h) oder △ m e h $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} =$ △ a b c. Aehnlich wird der Beweis auch für die übrigen Theile geführt.

§. 187. Zusatz.

Uebrigens braucht der Punct d nicht der Halbirungspunct der L. a b zu sein; er kann beliebig auf a b angenommen werden. Denn dadurch, daß aus den Puncten h, i, k mit c a Linien || gezogen werden, wird auch das △ a d c in gleiche Theile getheilt, und die der Ordnung nach zusammengehörenden Theile der beiden △ sind jedesmal die verlangten gleichen Theile des größern △; — oder verfahre beim Beweis also: Es ist zu beweisen, daß △ m e h $= \frac{1}{4}$ △ a b c.

△ d b c : △ d e h = $db^2 : de^2$ (§. 171)
Nun verhält sich aber d b : d e = d c : d h (§. 156)
$db^2 : de^2 = dc^2 : dh^2$ (VI)

Daher auch $\triangle dbc : \triangle deh = dc^2 : dh^2$
ebenso $\triangle adc : \triangle mdh = dc^2 : dh^2$

$$\triangle dbc : \triangle deh = \triangle adc : \triangle mdh \quad (II).$$

Da aber $\triangle deh = \frac{1}{4} \triangle dbc$ (Verf.)
so ist auch $\triangle mdh = \frac{1}{4} \triangle adc$

$$\triangle deh + mdh = \frac{1}{4} \triangle dbc + adc$$

oder $\triangle meh = \frac{1}{4} \triangle abc$.

In ähnlicher Weise kann dies auch von den übrigen Theilen bewiesen werden.

§. 188. Aufgabe.

Ein Dreieck in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit den drei Seiten des Dreiecks parallel laufen.

Aufl. Nimm ungefähr in der Mitte des $\triangle abc$ (Fig. 222) einen beliebigen Punct o an und ziehe in die Ecken des $\triangle$ g. Ll. Theile nun eines von den entstandenen 3 $\triangle$, etwa a b o, nach §. 184. Zus. 1 in n (hier 4) gleiche Theile, so daß die Theilungslinien || mit der Seite a b laufen. Aus den dadurch bestimmten Puncten d, e, f ziehe Ll. || a c und aus den Puncten g, h, i Ll. || b c, so ist das $\triangle abc$ in die verlangten Theile getheilt.

Beweis: $\triangle fio = \frac{1}{4} \triangle abo$ (Verf.), so ist auch $\triangle fko = \frac{1}{4} \triangle aco$ und $\triangle kio = \frac{1}{4} \triangle cbo$; folglich sind die $\triangle fio + fko + kio = \frac{1}{4} \triangle abo + aco + cbo$ oder $\triangle fik = \frac{1}{4} \triangle abc$. In ähnlicher Weise oder nach §. 187. Zus. kann dies auch von den übrigen Theilen bewiesen werden.

§. 189. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Seite parallel laufen.

Aufl. Theile eine Seite, z. B. a b (Fig. 223. 224. 225) oder a d (Fig. 226. 227) in n (hier 8) gleiche Theile und ziehe aus den Theilungspuncten Linien mit einer Seite des # parallel.

Beweis: Da alle einzelnen Theile wieder # # von gleicher Grundlinie und Höhe sind, so sind sie auch einander gleich (§. 135) und jedes kleinere # ist also der n te Theil des größern.

§. 190. Aufgabe.

Ein Parallelogramm von einem Ecke aus in n gleiche Theile zu theilen.

1. Aufl. u. Beweis: Das gegebene # sei a b c d (Fig. 228). Verwandle dasselbe in das $\triangle aed$ (§. 147. 2. Aufl.), theile dieses $\triangle$ in n (hier 7) gleiche Theile dadurch, daß Du die Grundlinien a e in n (hier 7)

gleiche Theile theilst (§. 179); ziehe von der Spitze d des △ Ll. in die Theilungspuncte, welche auf der L. a b des # sich befinden, so ist △ a f d $= \frac{1}{7}$ △ a e d und also auch $= \frac{1}{7}$ des # a b c d; dasselbe ist der Fall mit den △ f g d und g h d. Ziehe nun die Diagonale b d und i o || b d, so ist △ d b o = △ d b i (§. 136) und also auch △ h b d + d b o = △ h b d + d b i (IV), d. h. Viereck h b o d = △ h i d $= \frac{1}{7}$ △ a e d $= \frac{1}{7}$ # a b c d. Die Theile A + B + C + D sind demnach $= \frac{4}{7}$ # und △ o c d $= \frac{3}{7}$. Betrachte nun o c als die Grundlinie des △ o c d, theile sie und nach §. 179 auch das △ in 3 gleiche Theile, so ist ein Theil $= \frac{1}{7}$; also auch △ E $= \frac{1}{7}$ △ F $= \frac{1}{7}$, △ G $= \frac{1}{7}$ und somit ist das # in n (hier 7) gleiche Theile getheilt.

Zus. Da die Theilungspuncte m und n sich auch ergeben, wenn aus k und l Linien || i o oder || b d oder || e c gezogen werden (was aus §. 83 bewiesen werden kann), so kann die Auflösung dieser Aufgabe auch so gefaßt werden: Verwandle das # in ein △, theile dieses in n gleiche Theile, ziehe von den Theilungspuncten der L. a b in die Spitze d des △, ferner von den noch übrigen Theilungspuncten Ll. || der Diagonale bis an die Seite des # und von den dadurch auf dieser Seite bestimmten Puncten g. Ll. in die Spitze des △.

2. Aufl. u. Beweis: Ist a b c d (Fig. 229) das gegebene #, so ziehe die beiden Diagonalen, theile eine derselben (a c) in n (hier 5) gleiche Theile, ziehe durch die Theilungspuncte Ll. || der andern Diagonale und aus dem Ecke b g. Ll. in die durch die || Ll. bestimmten Puncte e, f, g, h. Da a o = o c (§. 74), folglich hier a o $= 2\frac{1}{2}$ und o c $= 2\frac{1}{2}$ Theilen, so läßt sich aus §. 83 nachweisen, daß a e : e f : f d $= 1 : 1 : \frac{1}{2}$; ebenso daß im Vergleich zu c d die Ll. c h : h g : g d $= 1 : 1 : \frac{1}{2}$. Da aber △ a b d = △ d c b (§. 70. Zus. 2), so folgt daraus und aus §. 170, daß a b e = e b f = (f b d + d b g) d. h. = f d g b = g b h = h b c und daß also das # in 5 gleiche Theile getheilt ist.

Zus. Ganz in derselben Weise wird verfahren, wenn ein Trapez in n gleiche Theile zu theilen ist.

§. 191. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in n Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit der Diagonallinie parallel laufen.

Aufl. u. Beweis: Ziehe die Diagonale d b (Fig. 230); dadurch wird das # in 2 gleiche △ getheilt (§. 70. Zus. 2). Ist nun n eine gerade Zahl, so theile jedes dieser △ in $\frac{n}{2}$ gleiche Theile. Ist aber n eine ungerade Zahl, so theile jedes der △ in n gleiche Theile nach §. 184. Zus. 1. Dadurch erhältst Du im ganzen # 2 × n gleiche Theile. Betrachtest Du

aber diese kleinen Theile als Hälften der eigentlichen Theile und nimmst also 2 solcher kleinen Theile zu einem n-Theil zusammen, so erhältst Du n gleiche Theile. Ist z. B. das # a b c d (Fig. 230) in 7 gleiche Theile zu theilen, so theile jedes △ in 7 gleiche Theile, wodurch im Ganzen 14 gleiche Theile entstehen; je 2 derselben sind aber $= \frac{1}{7}$ des #.

§. 192. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit zwei Seiten des Parallelogrammes parallel laufen.

Aufl. Ist das # a b c d (Fig. 231) zu theilen, so ziehe eine Diagonale a c, theile das eine der dadurch entstandenen △, etwa △ a b c in n (hier 3) gleiche Theile (§. 184) und ziehe dann durch die Puncte, welche auf der Diagonale durch die Parallellinien bestimmt werden, (h und e) Ll. || d c, so ist a f h g $= \frac{1}{3}$ # a b c d u. s. w.

Beweis: Er fließt eigentlich schon aus §. 184; weil nämlich jedes △ in n gleiche Theile getheilt ist und die △ einander gleich sind, so muß auch das # a b c d, welches aus den beiden △ besteht, in n gleiche Theile getheilt sein; doch kannst Du auch also beweisen:

$$\left.\begin{aligned} \triangle\, abc : \triangle\, afh &= ac^2 : ah^2 \\ \text{und } \triangle\, acd : \triangle\, ahg &= ac^2 : ah^2 \end{aligned}\right\} \text{(§. 171)}$$

$$\frac{\text{da aber } \triangle\, abc = \triangle\, acd \text{ (§. 70. Zus. 2)}}{\triangle\, afh = \triangle\, ahg.}$$

Da ferner △ a f h $= \frac{1}{3}$ △ a b c (Verf.) und also auch △ a h g $= \frac{1}{3}$ △ a c d, so sind auch △ (a f h + a h g) $= \frac{1}{3}$ △ (a b c + a c d), oder a f h g $= \frac{1}{3}$ # a b c d. Von den übrigen Theilen läßt sich dies in ähnlicher Art beweisen.

§. 193. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit allen Seiten des Parallelogramms parallel laufen.

Aufl. Theile durch die 2 Diagonalen das gegebene # a b c d (Fig. 232) in 4 gleiche △, theile dann eines derselben (△ o b c) nach §. 184. Zus. 1 in n (hier 3) gleiche Theile und ziehe in den andern △ die entsprechenden || Ll.

Beweis: (vergl. §. 188). Da jedes △ in 3 gleiche Theile getheilt ist und also jeder Theil $\frac{1}{3}$ des △ ist, so müssen je 4, der Ordnung nach zusammengehörende Theile der 4 △ auch $\frac{1}{3}$ des # sein, weil eben die 4 △ das # bilden.

§. 194. Aufgabe.

Ein Trapez in n gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Ist das Trapez a b c d (Fig. 233) in n (hier 4) gleiche Theile zu theilen, so theile jede der parallelen Linien in n gleiche Theile und ver-

einige die Theilungspuncte e und f u. s. w. durch g. Ll., so ist $A = B = C = D$.

Beweis: S. §. 137. Bew. 2).

§. 195. Aufgabe.

Ein Trapez in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer der nicht parallelen Seiten parallel laufen.

Aufl. Verwandle das Trapez a b c d (Fig. 234) in ein gleich großes △ (§. 150), theile dieses in n (hier 5) gleiche Theile, so daß △ a f d $= \frac{1}{5}$ △ a e d und also auch $= \frac{1}{5}$ Trapez a b c d ist. Verwandle nun das △ a f d nach §. 151 in ein gleich großes #, so daß # a g h d = △ a f d $= \frac{1}{5}$ Trapez a b c d ist. Zeichne nun neben einander n — 1 (hier 4) solcher # #, so sind A, B, C, D, E die verlangten Theile des Trapezes.

Beweis: $A + B + C + D = \frac{4}{5}$ des Trapezes a b c d (Verf.); daher muß E auch $\frac{1}{5}$ dieses Trapezes sein und das Trapez ist also in 5 gleiche Theile getheilt.

§. 196. Aufgabe.

Ein Trapezoid in n gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit 2 Seiten parallel laufen.

Aufl. Ist das Trapezoid a b c d (Fig. 235) in n (hier 4) gleiche Theile zu theilen, so ziehe die Diagonale a c, theile das △ a b c nach §. 184. Zus. 1 in n (= 4) gleiche Theile, ziehe dann aus den Puncten der Diagonale, welche durch die || Ll. bestimmt werden (e, f, g) Linien || c d, so wird dadurch auch das △ a c d in n gleiche Theile getheilt, und da die 2 △ a b c + a c d das Trapezoid bilden, so ist auch das Trapezoid in n gleiche Theile getheilt und also a i e m $= \frac{1}{4}$ a b c d.

Beweis: Er fließt eigentlich schon aus §§. 184 u. 192; doch kannst Du auch also beweisen:

$$\left.\begin{aligned} \triangle abc : \triangle aie &= ac^2 : ae^2 \\ \text{und } \triangle acd : \triangle aem &= ac^2 : ae^2 \end{aligned}\right\} (\S.\ 171)$$

$$\overline{\triangle abc : \triangle aie = \triangle acd : \triangle aem.}$$

Da aber △ a i e $= \frac{1}{4}$ △ a b c (Verf.), so ist auch △ a e m $= \frac{1}{4}$ △ a c d, also auch die △ a i e + a e m $= \frac{1}{4}$ △ a b c + a c d oder a i e m $= \frac{1}{4}$ a b c d.

§. 197. Aufgabe.

Ein Trapezoid in n gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit allen Seiten parallel laufen.

Aufl. Theile durch die beiden Diagonallinien das Trapezoid a b c d (Fig. 236) in 4 △, theile ferner eines dieser △ (△ a b e) in n (hier 4) gleiche Theile und ziehe in den übrigen △ eben so, wie Fig. 242 die || Ll.

Beweis: §. 193.

Zus. 1. In derselben Weise kann ein unregelmäßiges Vieleck in n gleiche Theile getheilt werden, wenn innerhalb der Figur ein Punct angenommen wird, und von demselben Ll. in die Ecken gezogen werden. Nun wird ein △ in n gleiche Theile getheilt und dann werden durch mit den Umfangsseiten der Figur parallel laufende Ll. auch die übrigen △ in n gleiche Theile getheilt. Die der Ordnung nach zusammengehörenden Theile machen dann die n-Theile des Vielecks aus.

Zus. 2. Ebenso kann ein regelmäßiges Vieleck in n gleiche Theile getheilt werden, wenn vom Centrum aus dasselbe in △ und jedes △ in n gleiche Theile getheilt wird.

Uebungsaufgaben.

138) Theile ein gegebenes △ von der Spitze aus in drei △, deren Größe in demselben Verhältnisse stehen, wie die Zahlen 1, 2, 3.

139) Theile ein gegebenes △ von einem Puncte der Grundlinie aus in 5 gleiche Theile.

140) Theile ein gegebenes Viereck in 3 gleiche Theile, so daß die Theilungslinien mit den Seiten || laufen.

141) Zeichne ein beliebiges △ und ein #, welches dem △ gleich ist, und theile beide Figuren in 6 gleiche Theile.

142) Zeichne nach §. 184. Zus. 2 ein Quadrat, welches $\frac{5}{8}$ mal so groß sein soll, als ein gegebenes Quadrat.

143) Theile ein gegebenes # von einer Ecke aus in 6 gleiche Theile.

144) Theile dasselbe # in 7 gleiche Theile, so daß die Theilungslinien a) mit 2 Seiten und b) mit der Diagonale || laufen.

145) Zeichne einen concentrischen Kreis in einen andern Kreis, so daß die Peripherie des kleineren gerade die Hälfte der Peripherie des größern Kreises beträgt. (Vergl. §. 167. Anmerk.)

146) Zeichne zwei Kreise, deren Peripherien sich verhalten wie 2 : 3. (Vergl. §. 167. Anmerk.)

XVI. Vom Messen der Linien und Ausmessen der Figuren.

A) Vom Messen der Linien.

§. 198. Erklärung.

a) Da das Maß und die zu messende Größe gleichartige Größen sein müssen, so muß das Maß einer Linie wieder eine Linie sein. Beim Messen einer Linie oder einer Länge bedient man sich eines Stabes von angenommener bestimmter Länge, Fuß oder Schuh (′) genannt. Jeder Schuh wird wieder in 10 oder 12 Zoll (″) und jeder Zoll in 10 oder 12 Linien (‴) und jede Linie in 10 oder 12 Scrupel (⁗) eingetheilt.

b) Die Eintheilung in jedesmalige 10 kleinere Theile nennt man Decimaleintheilung, Decimalmaß oder 10theiliges Maß (abgekürzt: d); die Eintheilung in jedesmalige 12 kleinere Theile heißt Duodecimaleintheilung, Duodecimalmaß oder 12theiliges Maß (abgekürzt:

dd). Der Fuß selbst ist aber in beiden Fällen von gleicher Länge. Zehn Fuß machen eine geometrische, zwölf Fuß dagegen eine gewöhnliche Ruthe (°) aus.

Anmerk. In Württemberg ist $1^0 = 16'$ dd; $1' = 12''$ und $1'' = 12'''$ dd.

§. 199. Erklärung.

Nach der Decimaleintheilung ist also

1 Ruthe	= 10 Schuh	= 100 Zoll	= 1000 Linien	= 10,000 Scrupel
	1 „	= 10 „	= 100 „	= 1000 „
		1 „	= 10 „	= 100 „
			1 „	= 10 „

Nach der Duodecimaleintheilung ist dagegen

1 Ruthe	= 12 Schuh	= 144 Zoll	= 1728 Linien	= 20,736 Scrupel
	1 „	= 12 „	= 144 „	= 1728 „
		1 „	= 12 „	= 144 „
			1 „	= 12 „

§. 200. Zusätze.

Da $10''$ d $= 12''$ dd; so ist $1''$ d $= \frac{12}{10} = \frac{6}{5}''$ dd;
ferner $1''$ dd $= \frac{10}{12} = \frac{5}{6}''$ d;
„ $100'''$ d $= 144'''$ dd; so ist $1'''$ d $= \frac{144}{100} = \frac{36}{25}'''$ dd;
ferner $1'''$ dd $= \frac{100}{144} = \frac{25}{36}'''$ d;
„ $1000''''$ d $= 1728''''$ dd; so ist $1''''$ d $= \frac{1728}{1000} = \frac{216}{125}''''$ dd;
ferner $1''''$ dd $= \frac{1000}{1728} = \frac{125}{216}''''$ dd;

oder:

$1''$ d : $1''$ dd $= \frac{1}{10} : \frac{1}{12} = \frac{6}{60} : \frac{5}{60} = 6 : 5$
$1''$ dd : $1''$ d $= \frac{1}{12} : \frac{1}{10} = 5 : 6$
$1'''$ d : $1'''$ dd $= \frac{1}{100} : \frac{1}{144} = 36 : 25$
$1'''$ dd : $1'''$ d $= \frac{1}{144} : \frac{1}{100} = 25 : 36$
$1''''$ d : $1''''$ dd $= \frac{1}{1000} : \frac{1}{1728} = 216 : 125$
$1''''$ dd : $1''''$ d $= \frac{1}{1728} : \frac{1}{1000} = 125 : 216$

Anmerk. 1. Da man beim Messen häufig des französischen Maßes sich bedient, so folgt hier eine Erklärung desselben. In Frankreich gebraucht man als Längenmaß den Meter (Mètre), welcher $\frac{1}{10{,}000{,}000}$ des Bogens unserer Erde vom Aequator bis zum Nordpol ist. Die Ober- und Unterabtheilungen sind folgende:

1 Grad oder Dégré	= 10 Myriamètres	= 100,000	Mètres;
1 Myriamètre	= 10 Kilomètres	= 10,000	» ;
1 Kilomètre	= 10 Hectomètres	= 1,000	» ;
1 Hectomètre	= 10 Décamètres	= 100	» ;
1 Décamètre	= 10 Mètres	= 10	» ;

1 Mètre = 10 Décimètres = 1 Mètre;
1 Décimètre = 10 Centimètres = 0,1 » ;
1 Centimètre = 10 Millimètres = 0,01 » ;

Ein Mètre ist = 443,,296 pariser Linien; der alte pariser Fuß = 144 pariser Linien (= 0,324,839 Mètre). Eine franz. Toise ist = 6 par. Fuß.

Anmerk. 2. In Bayern gilt der münchner Fuß als Einheit; er ist = 129,,38 par. Linien, (= 0,291,185 Mètre). Ein österreich. Fuß ist = 140,,127 par. Linien (= 0,316,102 Mètre). Ein preuß. oder rheinländ. Fuß ist = 139,,13 par. Linien (= 0,313,853 Mètre).

Anmerk. 3. Bei Fig. 237 ist a b = 1 Centimètre, a c = 1 Décimètre und 10 × a c ist = 1 Mètre.

§. 201. Erklärung.

Wenn irgend eine Länge, welche mit einem wirklichen Längenmaße gemessen worden ist, auf das Papier aufgezeichnet werden soll, so kann dies natürlich nicht in der Größe geschehen, welche der Maßstab angiebt, weil man sonst einen Papierstreifen nöthig hätte, der in der That selbst so lang wäre, als die gemessene Größe. Man bedient sich deshalb eines verkleinerten Maßstabes, dessen Anwendung auf die Aehnlichkeit der Dreiecke sich gründet. Dieser verkleinerte Maßstab heißt gewöhnlich: verjüngter Maßstab, und man versteht unter ihm eine Linie, welche in eine gewisse Anzahl (gewöhnlich 10 oder 12) gleicher Theile getheilt ist. Diese Theile können wieder eingetheit sein, und bedeuten die größeren Theile Ruthen, so sind die kleineren Schuh u. s. w.; bedeuten die größeren aber Schuhe: so sind die kleineren Zoll u. s. w. Besteht der Maßstab aus einer einfachen Linie, welche in bestimmte Theile getheilt ist, so heißt man ihn einen einfachen Maßstab.

§. 202. Aufgabe.

Einfache Maßstäbe zu fertigen.

a) Einen Fußmaßstab d, so daß 1 Fuß des verjüngten Maßstabes = 1 Zoll des wirklichen Maßstabes beträgt.

Aufl. Theile (Fig. 238) a b, welches ein Zoll ist, in 10 gleiche Theile; jeder dieser Theile ist, wenn a b des verjüngten Maßstabes 1 Fuß bedeutet, = 1 Zoll.

b) Einen Fußmaßstab d d, so daß 1 Fuß des verjüngten Maßstabes = 1 Zoll des wirklichen Maßstabes beträgt.

Aufl. Theile (Fig. 239) a b in 12 gleiche Theile, von denen jeder einzelne Theil, wenn a b des verjüngten Maßstabes 1 Fuß bedeutet, = 1 Zoll ist.

c) Einen Fußmaßstab d d, so daß 1 Fuß des verjüngten Maßstabes = der gegebenen Linie A ist.

Aufl. Mache (Fig. 240) a b = A und theile a b in 12 gleiche Theile, so ist ein Theil = 1 Zoll, wenn a b = 1 Fuß.

Zus. Die Theilung der Linie ab in 10 oder 12 oder auch mehrere Theile kann auch noch dadurch vorgenommen werden, daß man, gestützt auf die Lehre von der Aehnlichkeit der △, in den Puncten a und b senkrechte Linien errichtet, so viele beliebig große Theile auf dieselben aufträgt, als die L. ab erhalten soll, diese Theilungspuncte durch Ll. || ab vereinigt und von dem letzten Theilungspuncte eine schiefe L. nach a oder nach b zieht. Einen solchen Maßstab nennt man Transversalmaßstab.

§. 203. Aufgabe.

Einen Transversalmaßstab zu verfertigen, so daß 1 Fuß desselben = 1 Zoll des wirklichen Maßes ist.

1. Aufl. Ist (Fig. 241) ab = 1 Fuß des verjüngten Maßstabes, so errichte in a, b, e, f rc. Perpendikel, trage an ac so viele beliebig große, aber gleiche Theile, als ab getheilt werden soll (hier 10), ziehe aus den Theilungspuncten Linien || af und ziehe cb. Nun ist $h\,1 = \frac{1}{10}$; $i\,2 = \frac{2}{10}$; $k\,3 = \frac{3}{10}$ u. s. w. der L. ab.

2. Aufl. Errichte (Fig. 242) in a, b u. s. w. Perpendikel, trage die Hälfte der verlangten Theile (hier $\frac{10}{2} = 5$) auf ac, ziehe aus den Theilungspuncten Linien || ab, halbire ab (in 5) und ziehe a5 und d 5. Nun ist $h\,1 = \frac{1}{10}$; $i\,2 = \frac{2}{10}$; $b\,5 = \frac{5}{10}$; $l\,6 = \frac{6}{10}$; $k\,7 = \frac{7}{10}$ u. s. w. der L. ab.

§. 204. Aufgabe.

Einen Transversalmaßstab zu fertigen, in welchem die L. ab, welche einen Fuß oder Zoll vorstellen kann, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll.

1. Aufl. Errichte (§. 203. 1. Aufl.) einen Perpendikel in a, trage auf denselben die verlangte Anzahl beliebiger, aber gleicher Theile auf, ziehe aus den Theilungspuncten Ll. || ab und endlich, wie in Fig. 241, die L. cb.

2. Aufl. Errichte (§. 203. 2. Aufl.) einen Perpendikel in a, trage auf ihn die Hälfte der verlangten Theile auf, halbire ab und ziehe, wie in Fig. 242, von dem Halbirungspuncte Linien nach c und d.

Zus. Es kann an den Perpendikel auch nur $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ der verlangten Theile aufgetragen werden; dann aber müssen die Ll. ab und ac (Fig. 242) in 3 oder 4 Theile getheilt und von diesen Theilungspuncten aus, ähnlich den Beispielen Fig. 243, 244 und 245, schiefe Linien gezogen werden. Fig. 243 zeigt die L. ab in 27; Fig. 244 in 48 und Fig. 245 in 48 gleiche Theile getheilt.

§. 205. Aufgabe.

Einen tausendtheiligen Maßstab zu verfertigen.

Aufl. Durch einen tausendtheiligen Maßstab soll eine gegebene g. L. A in 1000 gleiche Theile getheilt werden, und daher ist also dieser Maßstab

auch blos ein Transversalmaßstab. Theile nun die gegebene L. in 10 gleiche Theile (Fig. 246 a b = b c = c d u. s. w. (Zur Ersparung des Raumes sind in der Figur blos 3 Theile gezeichnet.) Theile ferner den ersten Theil (= a b) wieder in 10 gleiche Theile und jeden dieser kleinen Theile wieder in 10 noch kleinere. Errichte nämlich in a den Perpendikel a g, trage auf ihn 10 beliebige aber gleiche Theile auf und ziehe aus diesen Theilungspuncten Ll. || mit a b (|| mit a d). Wird nun die schiefe L. g 9 gezogen, so ist (nach §. 203. 1. Aufl. Fig. 241) das erste Zehntel der L. a b wieder in 10 gleiche Theile getheilt. Werden aus den Theilungspuncten der L. a b noch weitere 9 Linien mit der L. g 9 parallel gezogen, so ist dadurch jedes Zehntel der L. a b in 10, folglich die ganze L. a b in $10 \times 10 = 100$ Theile getheilt und sonach enthält die L. A $10 \times 100 = 1000$ Theile.

Bedeuten nun die Theile a b, b c u. s. w. Ruthen, so ist b 1 der L. a b = 1 Schuh: b 2 = 2 Schuh; b 3 = 3 Schuh u. s. w. und n m = $\frac{1}{10}$ Schuh = 1 Zoll, o p = 2 Zoll, r q = 3 Zoll u. s. w. Bedeuten aber die Theile a b, b c u. s. w. Schuh, so ist b 1 = 1 Zoll; b 2 = 2 Zoll u. s. w. und n m = 1 Linie; o p = 2 Linien u. s. w.

§. 206. Aufgabe.

Einen Nonius oder einen Vernier zu verfertigen *).

Aufl. Ist (Fig. 247) a b ein bereits in seine Theile (hier in 12) eingetheilter Maßstab und Du wolltest noch Sechstel eines solchen Theiles angeben, so nimm ein Stäbchen c d, welches 5 Theile des Maßstabes enthält, theile diese Länge auf dem Stäbchen aber in 6 gleiche Theile. Das Stäbchen selbst heißt Nonius oder Vernier und jeder Theil desselben ist $\frac{1}{6}$ von den 5 Theilen des Maßstabes, also = $\frac{5}{6}$. Wenn nun eine Ziffer und M die Theile des Maßstabes und eine Ziffer und N die Theile des Nonius bedeutet, so ist also 0 N bis 1 N = $\frac{5}{6}$ und also 1 N bis 1 M = $\frac{1}{6}$, folglich auch 2 N bis 2 M = $\frac{2}{6}$; 3 N bis 3 M = $\frac{3}{6}$; 4 N bis 4 M = $\frac{4}{6}$; 5 N bis 5 M = $\frac{5}{6}$. Soll nun z. B. nach dem Maßstabe a b eine Länge von $6\frac{4}{6}$ aufgetragen werden, so schiebe den Nonius so an den Maßstab, daß 0 (Null) des Nonius zwischen 6 und 7 des Maßstabes, 4 des Nonius (4 ist der Zähler des Bruches) mit einem Striche des Maßstabes (hier mit 10) zusammenfällt, so ist der Theil von 6 M bis zum Null des Nonius = $\frac{4}{6}$; denn 9 M bis 3 N = $\frac{1}{6}$; 8 M bis 2 N = $\frac{2}{6}$; 7 M bis 1 N = $\frac{3}{6}$ und 6 M bis 0 N = $\frac{4}{6}$. Soll aber etwa $8\frac{5}{6}$ nach dem Maßstab bestimmt werden, so schiebe den Nonius nach Fig. 248 an den Maßstab.

---

*) Unter einem Nonius oder Vernier versteht man eine nach ihren Erfindern benannte sinnreiche Einrichtung eines Maßstabes, um kleinere Theile desselben genau anzugeben.

Zus. 1. Bei Fig. 249 sind 4 Theile des Maßstabes auf den Nonius in 5 Theile getheilt, also ist ein Theil des Nonius $= \frac{4}{5}$ von einem Theile des Maßstabes und durch die Verrückung des Nonius ist bei Fig. 203 demnach die Länge von $7\frac{4}{5}$ angegeben.

Zus. 2. Aus diesen Beispielen lassen sich leicht andere ableiten. Als allgemeine Regel gilt, daß wenn $n - 1$ Maßstabtheile auf dem Nonius in n Theile getheilt werden, dieser die n tel von jenen gibt. Also ist ein Noniustheil immer $= \frac{n-1}{n}$ Maßstabtheil. Wenn also z. B. 8tel durch den Nonius bestimmt werden sollen, so müssen auf denselben $8 - 1 = 7$ Theile des Maßstabes aufgetragen und in 8 Theile getheilt werden.

Uebungsaufgaben.

147) a) Wie viel Fuß, b) wie viel Zoll und c) wie viel Linien sind 15^0 d und dd?
148) Wie viel Zoll d d sind 12^0 4′ d d?
149) Wie viel Zoll d d sind 5^0 4″ d d?
150) Wie viel Linien d d sind 4′ 5″ 3‴ d d?
151) Wie viel Linien d sind 4′ 5″ 3‴ d?
152) Wie viel Linien d d sind 5^0 6‴ d d?
153) Wie viel Linien d sind 5^0 6‴ d?
154) Wie viel Ruthen, Schuh u. s. w. d sind $2\frac{1383}{4000}{}^0$ d?
155) Wie viel Schuh und Linien d sind $\frac{1033}{5000}{}^0$ d?
156) Wie viel Ruthen, Zoll u. s. w. sind $1\frac{157}{1728}{}^0$ d d?
157) Wie viel Fuß sind $\frac{2}{3}{}^0$ d d?
158) Wie viel Fuß sind sind $\frac{2}{3}{}^0$ d?
159) Wie viel Zoll sind $\frac{3}{4}{}^0$ d d?
160) Wie viel Linien sind $\frac{4}{5}{}^0$ d d?
161) Wie viel Ruthen u. s. w. sind 5326‴ d d?
162) Wie viel Ruthen u. s. w. sind 5326‴ d?
163) Wie viel Ruthen u. s. w. sind 26,524‴ d?
164) Wie viel Ruthen u. s. w. sind 26,524‴ d d?
165) Wie viel Ruthen d d sind 9′ d d?
166) Wie viel Ruthen u. s. w. d d sind 415′ d d?
167) Wie viel Ruthen u. s. w. d sind 3456‴ d?
168) 6′ d sind wie viel Ruthen d?
169) 8′ d d sind wie viel Ruthen d d?
170) 4′ 3″ d sind wie viel Ruthen d?
171) 5″ 6‴ d sind wie viel Schuh d?
172) $\frac{1}{2}$′ d sind wie viel einer Ruthe d?
173) $3\frac{4}{5}$′ d sind wie viel Ruthen d?
174) 3^0 4′ 5″ $2\frac{3}{4}$‴ d d sind wie viel Ruthen dd?
175) 8′ d sind wie viel Fuß d d? (!)
176) 125^0 d sind wie viel Ruthen d d?
177) 125^0 dd sind wie viel Ruthen d?
178) 3′ 5″ d sind wie viel d d?
179) 3′ 5″ d d sind wie viel d?
180) 4^0 3′ 5″ 6‴ d sind wie viel d d?
181) 4′ $2\frac{2}{5}$″ d d sind wie viel d?
182) 5″ $8\frac{5}{6}$‴ d sind wie viel d d?
183) Addire 8^0 5′ 6″ + 4^0 8′ 9″ + 3^0 5′ 4‴ + 7′ 8″ + 8^0 + 6‴ d.
184) Wenn von 5^0 2′ d abgezogen werden 2^0 7′ 6″ 8‴ d, wie viel bleibt?
185) Wenn 1^0 8′ 7″ 9‴ d d von 3^0 abgezogen werden, wie viel bleibt?
186) Es sollen 3^0 4′ 5″ 6‴ d 3 mal genommen werden; wie viel macht es?
187) Eine Latte ist 4′ 3″ 2‴ d d lang und eine andere Latte 4 mal so lang, wie lang ist die letztere?

188) Eine Stange von 2^0 5′ 8″ d soll in 3 gleiche Stücke abgeschnitten werden; wie lang ist jedes Stück?

189) Eine Stange, 3^0 $1\frac{1}{4}$′ d lang, soll in gleiche Stücke geschnitten werden, von welchen jedes $1\frac{1}{4}$′ d lang werden muß; wie viel Stücke bekommt man?

190) Eine Linie mißt 8^0 8′ 3″ d und eine andere 4^0 3″ 4‴ d; wie groß ist ihre Summe?

191) Von zwei Linien mißt die kürzere 5′ 6″ d d und der Unterschied beider Linien ist 5^0 3′ d d; wie groß ist die längere Linie in d d?

192) Eine Linie ist 3^0 4′ 5‴ d d lang; wie lang muß eine Linie gemacht werden die 8 mal so lang werden soll?

193) Eine Linie ist 6^0 5″ 6‴ d lang; wie lang muß eine Linie werden, die nur den 7. Theil so lang sein soll?

194) Eine Stange ist 5^0 6′ 3″ d lang; wenn nun ein Stück von 1^0 8″ 3‴ d abgeschnitten wird, wie lang ist das übrig bleibende Stück?

195) Die Seite eines regulären Sechsecks ist 6′ 9″ d d; wie groß ist der Umfang des ganzen Sechsecks?

196) Wenn der Umfang eines regulären Fünfecks dem des Sechsecks in der vorhergehenden Aufgabe gleich ist; wie groß ist eine Seite des Fünfecks?

197) Wenn die Seite eines regulären Achtecks = 2^0 11 3″ d d ist; wie groß ist die Seite eines Sechsecks, wenn der Umfang des letztern $3\frac{1}{2}$ mal größer ist, als der des Achtecks?

198) Wie groß ist die Seite eines regulären Neunecks, wenn die Seite eines regulären Siebenecks 3′ 5″ 4‴ d d ist, und der Umfang des Neunecks zu dem des Siebenecks sich verhält wie 5 : 2?

199) Die Seite eines gleichseitigen △ sei = 7′ 4″ d; wie groß ist der Umfang?

200) Der Umfang eines gleichseitigen △ sei 3^0 5″ 6‴ d d; wie groß ist eine Seite?

201) Die ungleiche Seite in einem gleichschenkligen △ sei = 5′ 3″ d d, der Umfang = 1^0 7′ 11″ d d; wie groß ist jede der gleichen Seiten?

202) Der Umfang eines gleichschenkligen △ sei = 3^0 5′ 4″ d d; die ungleiche Seite verhalte sich zu einer der gleichen wie 1 : 3; wie groß ist jede Seite?

203) Die ungleiche Seite eines gleichschenkligen △ sei = 2′ 7″ 5‴ d d und der ganze Umfang sei 7 mal so groß; wie groß ist jede der gleichen Seiten?

204) Wie groß ist der Umfang eines △, wenn die erste Seite = 4′ 5″ d, die zweite $1\frac{1}{2}$ mal so groß, als die erste und die dritte zweimal so groß, als die erste, ist?

205) Wie groß ist jede Seite eines △, wenn der Umfang 3^0 5′ 6″ d d beträgt und die Seiten sich verhalten, wie die Zahlen 1 : $1\frac{1}{2}$: $2\frac{1}{2}$?

206) Die Seite eines Quadrates beträgt 2^0 5″ d; wie groß ist der Umfang?

207) Der Umfang eines Quadrates beträgt 3^0 1′ 2″ d; wie groß ist eine Seite?

208) Die Seite eines Rhombus beträgt 4′ 6″ d d; wie groß ist der Umfang?

209) In einem Rechtecke stehen die Seiten in dem Verhältnisse, wie die Zahlen 1:2; wenn nun die kürzere Seite = 5′ 4″ d ist; wie groß ist der Umfang des Rechtecks?

210) Eine viereckige Tischplatte ist 6′ 5″ d d lang und $3\frac{1}{2}$′ d d breit; welchen Umfang hat sie?

211) Ein viereckiger Stubenboden ist $20\frac{1}{2}$′ d lang und hat einen Umfang von 7^0 $2\frac{1}{2}$ d, wie breit ist er?

212) Die Seite eines gleichseitigen △ ist = 6′ d und die Seite eines andern gleichseitigen △ ist = 8′ d; wie verhalten sich ihre Umfänge?

213) In einem gleichschenkligen △ ist ein Schenkel 12′ d d und die Grundlinie 8′; in einem andern dem ersteren ähnlichen △ ist die Grundlinie 15′; wie groß ist einer der gleichen Schenkel im zweiten △?

214) Entwirf einen verjüngten Maßstab und zeichne dann Linien, deren Größe im Decimalmaßstab beträgt: a) 2^0 9′ $5\frac{1}{2}$″; b) $2\frac{3}{5}$ ^{0}; c) 1^0 7″; d) 1^0 2′ $3\frac{1}{2}$″; e) 3^0 $7\frac{1}{2}$′; f) 4^0 2′ 3″ $4\frac{1}{2}$‴ *).

215) Ziehe mehrere Linien und bestimme nach dem verjüngten Maßstab die Länge einer jeden.

216) Zeichne ein gleichseitiges △, dessen eine Seite $6\frac{1}{4}$′ d ist.

217) Zeichne ein △, dessen Grundlinie 1′ 8″ 6‴ und dessen einer ∟ an der Grundlinie 60^0 und dessen anderer ∟ 45^0 beträgt.

---

*) Auch mehrere der vorhergehenden Aufgaben können zum Zeichnen benutzt werden.

218) In einem △ ist die Grundlinie 10″ d d; der eine ∟ an derselben 30°; der andere ∟ 40°; zeichne nun ein △, welches diesem ähnlich ist, dessen Grundlinie aber 15″ d d beträgt.

219) Ziehe eine beliebig gerade Linie; setze an den einen Endpunct derselben eine andere g. L. von 2′ 4″ d Länge unter einem ∟ von 50° an und ziehe von dem andern Endpuncte der zweiten Linie eine dritte L. unter einem ∟ von 90° gegen die zuerst gezogene Linie hin, so daß diese berührt wird; wie groß ist nun die zuerst gezogene L. in soweit sie eine Seite des entstandenen △ bildet.

220) Zeichne ein △, dessen Grundlinie 2′ 6″ d d ist, dessen ∟∟ an der Grundlinie gleich sind und dessen ∟, welcher der Grundlinie gegenübersteht, 30° beträgt.

221) Zeichne ein △, dessen Grundlinie = 2′ 8″ d, dessen Winkel an der Spitze = 45° und dessen einer ∟ an der Grundlinie = 60° ist.

222) Zeichne ein rechtwinklig gleichschenkliges △, in welchem die Hypotenuse 1½′ d lang ist.

223) Zeichne ein rechtwinkliges △, in welchem die Hypotenuse 6′ d und eine Kathete 4′ 8″ d ist; wie groß ist die andere Kathete?

224) Zeichne ein rechtwinkliges △, dessen Hypotenuse 3′ d und ein ∟ an derselben 60° beträgt; wie groß ist der drite ∟ und wie groß jede Kathete?

225) Zeichne ein gleichschenkliges △, in welchem die Grundlinie zur Höhe sich verhält wie 1 : 2.

226) Zeichne ein △, in welchem ein ∟ = 150° und die beiden, den ∟ einschließenden Seiten = 3′ 2″ und 4′ 3″ d sind.

B) Vom Ausmessen geradliniger Figuren.

§. 207. Erklärungen.

Da das Maß und die zu messende Größe gleichartige Größen sein müssen, so muß das Maß einer Fläche wieder eine Fläche sein. Als Flächeneinheit nimmt man das reguläre Viereck, das Quadrat an, und man unterscheidet nun Quadratruthen, Quadratschuh u. s. w.

Eine Quadratruthe (□°) ist eine Quadratfläche, von der jede Seite = 1 Ruthe ist;

ein Quadratschuh (□′) ist eine Quadratfläche, von der jede Seite = 1 Schuh ist;

ein Quadratzoll (□″) ist eine Quadratfläche, von der jede Seite = 1 Zoll ist;

eine Quadratlinie (□‴) ist eine Quadratfläche, von der jede Seite = 1 Linie ist.

Zus. Ganz große Flächen werden mit Quadratmeilen, d. h. mit Quadratflächen gemessen, von welchen jede Seite 1 Meile lang ist.

§. 208. Erklärung.

Nach der Decimaleintheilung ist

1 □° = 100 □′	= 10,000 □″	= 1,000,000 □‴	
	1 □′ = 100 □″	= 10,000 □‴	
		1 □″ = 100 □‴	

Nach der Duodecimaleintheilung ist

1 □° = 144 □′	= 20,736 □″	= 2,985,984 □‴	
	1 □′ = 144 □″	= 20,736 □‴	
		1 □″ = 144 □‴	

Da in Bayern der Fuß sowohl bei der Decimal- als Duodecimaleintheilung von gleicher Länge, und die Duodecimalruthe um 2 Fuß länger ist, als die Decimalruthe, so verhält sich

1 □° d : 1 □° d d = 25 : 36, und 1 □° d d : 1 □° d = 36 : 25;

folglich ist 1 □° d = $\frac{25}{36}$ □° d d, und 1 □° d d = $\frac{36}{25}$ □° d;

1 □′ d : 1 □′ d d = 1 : 1;

folglich ist 1 □′ d = 1 □′ d d und umgekehrt;

1 □″ d : 1 □″ d d = 36 : 25, und 1 □″ d d : 1 □″ d = 25 : 36;

folglich ist 1 □″ d = $\frac{36}{25}$ □″ d d, und 1 □″ d d = $\frac{25}{36}$ □″ d;

1 □‴ d : 1 □‴ d d = 1296 : 625, und 1 □‴ d d : 1 □‴ d = 625 : 1296;

folglich ist 1 □‴ d = $\frac{1296}{625}$ □‴ d d, und 1 □‴ d d = $\frac{625}{1296}$ □‴ d.

Anmerk. 1. Als Einheit des französischen Flächenmaßes ist das Quadratmeter oder Centiare angenommen und 100 Quadratmeter oder 1 Quadratdecamètre geben das Feldmaß Are. Die Abtheilungen sind folgende:

1 Quadratdegré (□ Meil.) ist	= 10 □ Myriamètres	=	1,000,000 Ares;
1 □ Myriamètre	= 10 □ Kilomètres od. Myriares	=	100,000 "
1 Myriare	= 10 Kiliares	=	10,000 "
1 Kiliare	= 10 Hectares	=	1,000 "
1 Hectare	= 10 Décares	=	100 "
1 Décare	= 10 Ares	=	10 "
1 Are	= 10 Déciares	=	1 "
1 Déciare	= 10 Centiares	=	0,1 "
1 Centiare	= 10 Milliares	=	0,01 "
1 Milliare	= 10 □ Décimètres	=	0,001 "
1 □ Décimètre	= 10 □ Centimètres	=	0,0001 "
1 □ Centimètre	= 10 □ Millimètres	=	0,00001 "

Anmerk. 2. Ein bayerisches Tagwerk oder ein Morgen ist ein Quadrat von 200 Fuß lang und 200 Fuß breit, also = 40,000 □′ = 400 □° = $32290_{,09}$ paris. □ Fuß. Ein bayerisches Tagwerk enthält ferner 100 Decimalen; somit ist 1 Decimale = 0,01 Tagwerk = 400 □′.

Eine bayer. Quadratmeile ist = 645464836 bayer. □′ = $16136_{,62}$ bayer. Tagwerk.

Ein österreichisch Joch ist = 57600 öster. □′ = $54543_{,19}$ par. □′.

§. 209. Lehrsatz.

1) In einem Quadrate oder 2) Rechtecke ist das Product zweier, einen Winkel einschließenden Seiten gleich dem Flächeninhalte der Figur.

Beweis zu 1: Ist Fig. 250 ein Quadrat und a b = 4′, so ist a m i o = einem □′; dergleichen □ Schuh liegen an der Linie a b im Ganzen 4; diese 4 □ Schuh liegen aber 4 mal in Reihen neben einander; somit muß das ganze Quadrat 4 × 4 = 16 □′ enthalten.

Beweis zu 2: Ist Fig. 251 ein Rechteck und ef = 4′ und eg = 2′, so liegen die 4 □′ der Linie ef zweimal übereinander, folglich ist der Flächeninhalt $ef \times eg = 4 \times 2 = 8$ □′.

Zus. 1. Da jedes # einem andern gleich ist, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat (§. 135), so kann also jedes schiefwinklige # in ein rechtwinkliges verwandelt werden, welches gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit dem schiefwinkligen hat; daher läßt sich dieser Lehrsatz allgemeiner so ausdrücken: Den Flächeninhalt eines # findet man, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt, oder: der Flächeninhalt eines # ist = dem Producte aus der Grundlinie mit der Höhe.

Zus. 2. Bei einem Quadrate braucht man nur eine Seite mit sich selbst zu multipliciren, um den Flächeninhalt zu finden.

Zus. 3. Ist **F** = Flächeninhalt, **G** = Grundlinie und **H** = Höhe, so ist beim # $F = G \times H$ und also $G = \frac{F}{H}$ und $H = \frac{F}{G}$, und wenn bei dem Quadrat eine Seite = a, so ist $F = a \times a = a^2$ und also $a = \sqrt{F} = \sqrt{a^2}$.

§. 210. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu finden.

Aufl. Multiplicire die Grundlinie mit der Höhe und dividire das Product durch 2.

Beweis: Da jedes △ die Hälfte eines # (§. 136), so findet man den Flächeninhalt dieses #, wenn man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt (§. 209. Zus. 1), und folglich den des △, wenn man die Hälfte von diesem Producte nimmt.

Zus. 1. Bezeichnet man die Grundlinie mit **G**, so ist $F = \frac{G \times H}{2}$ und folglich $G = \frac{2F}{H}$ und $H = \frac{2F}{G}$.

Zus. 2. Es ist einerlei, ob man die ganze Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicirt und das Product halbirt, oder ob man die ganze Grundlinie mit der halben Höhe oder ob man die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicirt; daher ist $F = \frac{G \times H}{2} = G \times \frac{H}{2} = \frac{G}{2} \times H$.

Anmerk. Bei einem stumpfwinkligen △ kann die Linie, welche die Höhe bezeichnet, auch außerhalb der Figur gezogen werden müssen; in diesem Falle muß die Grundlinie verlängert werden.

Zus. 3. Nach §. 159 kann der Flächeninhalt eines gleichseitigen △ auch mit Hilfe der dort angegebenen Verhältnisse gefunden werden, wenn auch nur die Größe einer Seite bekannt ist. Ist z. B. die Seite eines gleichseitigen △ $= 2\frac{1}{2}{}^{0}$ d; so ist der Flächeninhalt $= [2\frac{1}{2} \times (2\frac{1}{2} \times \frac{866}{1000})] : 2 = 2\frac{113}{160}$ □°.

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen △, von dem nur 1 Seite bekannt ist, kann noch auf folgende Art gefunden werden. Ist nämlich Fig. 193 a b c ein gleichseitiges △ und a b = 1; so ist nach §. 159 c d = 0,866 und der Flächeninhalt des △ a b c ist also nach §. 210 $= \frac{1 \times 0{,}866}{2} = \frac{1}{2} \times 0{,}866 = 0{,}433$. Denkt man aber auf die L. a b ein Quadrat gezeichnet, so ist $ab^2 = 1 \times 1 = 1$ (§. 209); und es verhält sich also das △ zum Quadrat wie 0,433 : 1 oder wie 433 : 1000; folglich ist das △ $\frac{433}{1000}$ vom Quadrat. Ist nun z. B. die Seite $ab = 2\frac{1}{2}$ ° d, so ist der Flächeninhalt des Quadrates oder $ab^2 = 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{25}{4}$ und der Flächeninhalt des △ also $= \frac{433}{1000} \times \frac{25}{4} = 2\frac{113}{160}$ □°, was mit obigem Flächeninhalte übereinstimmt.

§. 211. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Trapezes zu finden.

Aufl. Addire (Fig. 252) die beiden parallelen Seiten, multiplicire sie mit ihrer Entfernung (Höhe) und dividire das Product durch 2; also ist $F = \frac{(ab \times dc) \times ed}{2}$.

Beweis: Ziehe die Diagonale d b und den Perpendikel e d, so ist der Flächeninhalt

des △ $abd = \frac{ab \times ed}{2}$ (§. 210)

des △ $dbc = \frac{dc \times ed}{2}$ (§. 210)

der △ $abd + dbc = \frac{(ab + dc) \times ed}{2}$

Zus. 1. Zieht man in einem Trapezoid eine Diagonallinie (= D), so erhält man 2 △; bedeutet nun D die gemeinschaftliche Grundlinie und H die Höhe des einen und H′ die Höhe des andern △, so ist des Trapezoids $F = \frac{D \times H}{2} + \frac{D \times H'}{2} = (H + H') \times \frac{D}{2}$.

§. 212. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines regulären Vielecks von n Seiten zu finden.

Aufl. Ziehe vom Centrum aus Linien in die Scheitel der Polygonwinkel, wodurch n△ entstehen, rechne den Flächeninhalt eines △ aus und multiplicire ihn mit n, d. h. mit der Anzahl der Seiten. Ist (Fig. 85) der Flächeninhalt des △ a o c = 10 □′, so ist des Vielecks $F = 6 \times 10 = 60$ □′.

Beweis: Da die △ alle einander gleich sind (§. 89. Zus. 1) und jedes reguläre Vieleck so viele △ enthält, als es Seiten hat, so ist des

regulären n=Ecks $F = n \times$ dem Flächeninhalte eines einzigen $\triangle$ oder $F = n \times \frac{G \times H}{2}$.

§. 213. Aufgabe.

Den Flächeninhalt einer vielseitigen geradlinigen unregelmäßigen Figur zu finden.

1. Aufl. Theile die Figur durch Diagonalen in $\triangle$, rechne jedes besonders aus und addire die Flächeninhalte der einzelnen $\triangle$; ihre Summe gibt den Flächeninhalt der Figur.

2. Aufl. Theile die Figur in Trapeze (und $\triangle$), rechne den Inhalt eines jeden aus; ihre Summe ist $= F$.

Uebungsaufgaben.

227) 8 $\square^0$ d und dd sind wie viel $\square'$, $\square''$ und $\square'''$ d u. d d?
228) 1 $\square^0 + 8 \square' + 4 \square''$ d u. d d sind wie viel $\square''$ d u. d d?
229) 1 $\square^0 + 2 \square''$ d u. d d sind wie viel $\square''$ d u. d d?
230) $\frac{3}{4}$ $\square^0$ d u. d d sind wie viel $\square'$ d u. d d?
231) $\frac{1}{5}$ $\square'$ sind wie viel $\square''$ d u. d d?
232) $4\frac{3}{10}$ $\square'$ sind wie viel $\square''$ d u. d d?
233) 4 $\square^0$ $5\frac{1}{3}$ $\square'$ d d sind wie viel Drittels $\square'$ d d?
234) 12456 $\square'''$ d sind wie viel $\square'$ d?
235) 3456789 $\square'''$ d d sind wie viel $\square^0$ d d?
236) 24 $\square'$ sind der wie vielste Theil einer $\square^0$ d und einer $\square^0$ d d?
237) 145 $\square''$ d d sind der wie vielste Theil eines $\square'$ d d?
238) 145 $\square''$ d sind der wie vielste Theil einer $\square^0$ d?
239) 45 $\square'$ 36 $\square''$ d sind der wie vielste Theil einer $\square^0$ d?
240) 2 $\square^0$ 5 $\square''$ d d sind wie viel $\square^0$ d d, in Bruchform ausgedrückt?
241) 64 $\square'$ d d sind wie viel $\square'$ d? (!)
242) 6 $\square^0$ d sind wie viel $\square^0$ d d?
243) 6 $\square^0$ d d sind wie viel $\square^0$ d?
244) 5 $\square^0$ 30 $\square'$ d sind wie viel d d?
245) 18 $\square^0$ 70 $\square'$ d d sind wie viel d?
246) 12 $\square^0$ 45 $\square''$ d sind wie viel d d?

247) Ein Landmann hat drei Wiesen; der Flächeninhalt der ersten beträgt: 450 $\square^0$ 88 $\square'$ 96 $\square''$ d d; der der zweiten: $370\frac{1}{2}$ $\square^0$; der der dritten 523 $\square^0$ 34 $\square'$ $57\frac{1}{2}$ $\square''$ d d; wie groß sind die drei Wiesen zusammen?

248) Ein Landmann will drei Felder a) von 524 $\square^0$ 94 $\square'$; b) von 236 $\square^0$ 44 $\square'$ 96 $\square''$ und c) von 724 $\square^0$ $53\frac{1}{2}$ $\square'$ d verkaufen; wenn er nun für 1 $\square^0$ sechs Gulden bekäme, wie viel würde er im Ganzen einnehmen?

249) Jemand verkauft von einer Wiese, welche 924 $\square^0$ d d groß ist, ein Stück mit 237 $\square^0$ 86 $\square'$ 36 $\square''$ d d; wie groß ist der Rest?

250) Jemand hat im Anfange seines Haushaltens nur einen Acker von 824 $\square^0$ 35 $\square'$ $87\frac{1}{2}$ $\square''$ d d; nach 10 Jahren war er aber im Besitz von Feldgründen, welche $25\frac{1}{2}$ mal so groß waren, als der Flächenraum seines ersten Ackers; wie viel Flächenraum besaß er nun?

251) Ein Zimmer ist 24′ lang, 20′ breit und 12′ (d) hoch; wie viel kostet das Weißen, wenn eine $\square^0$ d mit 18 Kr. bezahlt wird?

252) Ein Landmann hat drei Felder, von denen jedes ein Rechteck bildet; a) ist 20° 6′ d lang, 18° 5′ breit; b) ist 24° 8′ lang, 20° breit; c) ist 30° lang, 17′ 8″ d breit; wie viel bayr. Tagwerk machen sie zusammen aus?

253) Ein Landmann vertheilt eine Wiese, welche 5 bayr. Tagwerk 87 Decimalen groß ist, unter seine 7 Kinder; wie viel erhält ein Kind?

254) Wie groß ist ein gleichseitiges △, wenn das Quadrat der Grundlinie a b = $\frac{1}{4}$°′ groß ist?

255) Wie groß ist ein gleichseitiges △, dessen eine Seite $3\frac{1}{2}$° d lang ist?

256) Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen △, dessen Grundlinie $3\frac{3}{4}$′ lang ist?

257) Wie viel Flächenraum hat ein Garten, der ein gleichseitiges △ bildet, wenn eine Seite 5° 8′ d d lang ist?

258) Wie groß ist ein rechtwinkliges △, wenn die Katheten $5\frac{3}{4}$″ und $4\frac{1}{2}$″ d d lang sind?

259) Der Inhalt eines rechtwinkligen △ beträgt 432 □′ und die eine Kathete 3° 6′ d; wie groß ist die andere Kathete?

260) Die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen △ beträgt 12′ d; wie groß ist der Flächeninhalt des △?

261) Der Flächeninhalt eines gleichschenklig rechtwinkligen △ beträgt $24\frac{1}{2}$ □′ d; wie groß ist die Hypotenuse?

262) Der Flächeninhalt eines gleichschenklig rechtwinkligen △ beträgt 9 □′ 68 □″ d; wie groß ist eine Kathete?

263) Die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen △ ist = 16′; wie groß ist der Perpendikel dieses △ und der Inhalt desselben?

264) Der Perpendikel eines gleichschenklig rechtwinkligen △ ist = 2° d; wie groß ist der Flächeninhalt des △ und das Quadrat der Hypotenuse?

265) Ein Garten hat die Form eines gleichschenkligen △; die Höhe dieses △ beträgt 240′: wie lang ist die Grundlinie, wenn der Flächeninhalt $\frac{3}{4}$ bay. Tagwerk ausmacht?

266) Der Inhalt eines # sei 112 □′ 60 □″, die Höhe 8′ 2″ d; wie groß ist die Grundlinie?

267) Die Seite eines Quadrates beträgt 4° 5′ d; wie groß ist der Umfang und der Inhalt?

268) Die Seite eines Quadrats ist = $4\frac{2}{3}$° d; wie groß ist der Umfang und der Inhalt?

269) Der Umfang eines Quadrates beträgt 24′ 8″ d; wie groß ist der Flächeninhalt?

270) Der Inhalt eines Quadrates sei 3844 □″ d d; wie groß ist eine Seite?

271) Der Inhalt eines Quadrates sei 40 □′ 96 □″ d; wie groß ist der Umfang.

272) Wie groß ist eines der △, die in einem Quadrate dadurch entstehen, daß sich die 8′ langen Diagonalen durchschneiden?

273) Die Grundlinie einer Raute beträgt 2° 5′ d d und die Höhe $1\frac{1}{2}$° d d; wie groß ist der Flächeninhalt?

274) Die Grundlinie einer Raute ist $3\frac{2}{3}$° d d lang und der Flächeninhalt beträgt $9\frac{7}{9}$ □° d d; wie groß ist die Höhe?

275) Ein Rechteck, dessen Inhalt 3456 □° 48 □′ d d beträgt, ist 50° breit; wie lang ist es?

276) Ein rechtwinkliger Garten ist 450′ lang und sein Flächeninhalt beträgt 3456 □° 36 □′ d d; wie groß ist seine Breite?

277) Die eine Seite eines Rechtecks beträgt 7′ die andere 15′; wie groß sind der Inhalt und der Umfang?

278) Die eine Seite eines Rechtecks beträgt 5° 4′ 3″ d d und der Inhalt 40 □° 60 □′ d d; wie groß ist die andere Seite und wie groß der Umfang?

279) Der Inhalt eines Rechtecks ist 96 □″ und eine Seite 8″ d; wie groß ist die andere Seite und wie groß der Umfang?

280) Die eine Seite eines Rechtecks ist = 20° und der Flächeninhalt = 72 □° dd; wie groß ist die andere Seite und wie groß der Umfang?

281) Eine Wiese in Form eines Rechtecks ist 864′ 5″ d d lang und 360′ 6″ dd breit; wie viel bayerische Tagwerk enthält sie?

282) Der Flächeninhalt eines Rhomboids beträgt 25 □° d d und die Höhe 4° 5′ d d; wie groß ist die Grundlinie?

283) Die Höhe eines Rhomboides ist = $\frac{2}{3}$° und die Länge = $\frac{5}{6}$° d d; wie groß ist der Flächeninhalt?

284) In einem Trapez sind die beiden Parallelen 12′ und 8′ und der Abstand 6′; wie groß ist der Inhalt?

285) In einem Trapez sind die beiden Parallelen 10′ und 6′ und der Inhalt ist 32 □′; wie groß ist der Abstand der Parallelen?

286) In einem Trapez ist die eine parallele Seite = 87′ und die andere = 120′, und der Abstand ist = 60′; wie groß ist der Inhalt?

287) Die Seite eines regulären Sechsecks ist = 224″ d d; wie groß ist der Flächeninhalt?

288) Es soll in einem Garten ein sechsseitiges Gartenhaus ausgesteckt werden, dessen Seiten 15′ lang sind; welchen Flächenraum (d d) nimmt das Gartenhaus ein?

289) Der Fußboden eines Schulzimmers ist 26′ lang und 15¾′ breit; wie groß (dd) ist er?

290) Zu einem Fußteppich in ein Zimmer, von dem eine Seite 30′ d beträgt, braucht man 600 Quadrate von farbigem Tuche. Die Seite eines solchen Quadrates ist aber 1½′ lang. Nun fragt sich: wie groß ist die andere Seite des Zimmers und wie viele Tuchquadrate zählt man in der Länge und wie viele in der Breite des Teppichs, und welche Fläche bedeckt der Teppich?

291) Der Fußboden eines Saales, der 5° 5¾′ d d lang und 3° 4½′ d d breit ist, soll neu gebrettert werden; wie viel Bretter sind nöthig, wenn jedes Brett 22½′ lang und 1½′ d d breit ist?

292) Ein Zimmer, 40′ lang, 30′ breit und 12′ d d hoch, soll stuccaturt werden. Wie viel kostet diese Arbeit, wenn nicht blos die Decke, sondern auch die Wände bekleidet werden sollen und der □′ mit 4 Kr. bezahlt wird?

293) Die Wände eines Zimmers, welches 24′ lang, 18′ breit und 12′ d d hoch ist, sollen tapezirt werden. Wie viel Ellen Tapeten sind erforderlich, wenn die Tapete selbst 1½ Elle (à 2 Fuß) breit ist und die Fenster unberücksichtigt bleiben?

294) Ein großes Oelgemälde ist mit einem 3½″ d d breiten goldenen Rahmen umgeben. Das Gemälde ist im Lichten (d. h. soweit es von dem Rahmen unbedeckt ist) 6½′ lang und 4½′ breit. Wie groß ist a) die Fläche, welche das ganze Gemälde mit dem Rahmen bedeckt? b) Wie groß ist das Bild oder die Fläche des Gemäldes im Lichten? und c) wie groß ist der Rahmen, d. h. welchen Flächenraum bedeckt er?

295) A tauscht für einen Acker von 60° d d Länge und 15¾° Breite einen andern Acker von gleicher Güte ein; wie lange muß der eingetauschte Acker, dessen Breite 12° beträgt, sein, wenn A keinen Verlust hinsichtlich der Größe erleiden soll?

296) B tauscht für einen Acker von 50° d d Länge und 12½° Breite einen andern Acker von geringerer Güte ein; der eingetauschte Acker hat aber eine Breite von 18°. Wie lang muß der Acker sein, wenn für die geringere Güte eine um 15½ □° d d größere Fläche als Enschädigung gegeben wird?

297) A hat einen Acker 18° d d lang und 6⅔° breit. B, dessen Feld an den Acker des A angrenzt, möchte nun zu seinem Felde einen Theil der Länge vom Acker des A geschlagen haben und kann dem A dafür 8′ d d zur Breite überlassen; wie viel muß A dem B von der Länge seines Ackers abtreten?

298) Jemand will den Vorplatz im Hause mit Backsteinen belegen und braucht dazu 1200 Backsteine, von denen jeder 6″ d d lang und 4″ d d breit ist. Man räth ihm aber, Backsteine in Quadratform zu nehmen und zwar solche, von denen eine Seite 1′ d d lang ist; wie viel der letztern hat er nun nöthig?

299) Ein Saal, 56′ lang, 24′ breit und 12′ hoch, hat 5 Fenster, 4′ breit und 6′ hoch, und eine Thür, 4′ breit und 7′ hoch. Wenn nun die 4 Wände mit Tapeten, die 1 Elle breit sind, belegt werden sollen, so fragt sich, wie viel Fuß müssen sammtliche Tapeten in der Länge betragen?

300) Eine hölzerne Kiste mit Deckel ist außen 6½′ lang, 5′ breit und 4′ hoch; die dazu verwendeten Bretter sind 1½″ d d dick. Wenn nun die Kiste inwendig mit Papier ausgeklebt und auswendig mit Blech so belegt werden soll, daß gar kein Holz an der Kiste mehr sichtbar ist, so fragt sich: a) wie viel Quadratfuß Papier und b) wie viel Quadratfuß Blech sind dazu erforderlich?

---

301) Zeichne ein △, dessen Grundlinie 8′ und dessen Höhe 7′ beträgt; wie groß ist der Flächeninhalt?

302) Zeichne ein △ von 1 □′ 44 □″ d Inhalt und mache die Höhe = 2′ 4″ d; wie groß ist die Grundlinie?

303) Zeichne ein Quadrat und auf eine Seite desselben ein △ so, daß die Spitze des △ in der der Grundlinie gegenüber liegenden Seite des Quadrats liegt; wenn nun eine Seite des Quadrates 2′ 5″ d d lang ist; wie groß ist dann der Flächeninhalt des △?

304) Zeichne drei ## , von denen jedes eine Grundlinie von 4′ 2″ d d, eine Höhe von 6′ 4″ d d und von denen das eine lauter rechte und die beiden andern lauter schiefe ∟ haben soll; wie groß ist der Flächeninhalt derselben zusammengenommen?

305) Zeichne ein #, von dem eine Seite 6′, eine andere 7′ und der von beiden eingeschlossene ∟ = 60° ist; wie groß ist jeder ∟ und der Umfang, und was für ein # ist es?

306) Zeichne ein #, von dem die eine Diagonale von 18′ die andere von 12′ unter einem ∟ von 30° durchschneidet; was für ein # ist es?

307) Zeichne ein Rechteck, dessen eine Seite 9′ und dessen Diagonale 12′ beträgt.

308) Zeichne eine Raute, deren Seite 8′ und deren einer ∟ 80° beträgt.

309) Wie verhält sich das Quadrat der Hypotenuse zu dem Quadrate der einen Kathete in einem gleichschenkligen rechtwinkligen △, und wie groß ist der Flächeninhalt eines jeden einzelnen Quadrates, die auf die Seiten gezeichnet werden, wenn die eine Kathete 6′ lang ist?

310) Zeichne ein Quadrat, welches so groß ist, als zwei andere, deren Seiten 8″ und 14″ d d groß sind.

311) Zeichne Quadrate, welche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$mal so groß sind, als ein gegebenes Quadrat.

312) Die eine Kathete eines rechtwinkligen △ ist = 12′, die andere = 16′; wie groß ist die Hypotenuse?

313) Das Quadrat der Hypotenuse beträgt 164 □′, das der einen Kathete 100 □′; wie groß ist die andere Kathete?

C) Vom Ausmessen des Kreises.

§. 214. Erklärung.

a) Bei allen Kreisen findet nach §. 167 ein und dasselbe Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie statt. Die Peripherie ist aber etwas mehr, als dreimal so lang, als der Durchmesser, und dieser ist also ungefähr der dritte Theil von der Länge der Peripherie.

Anmerk. Es geht über die Bestimmung dieses Lehrbuches, genau nachzuweisen, wie man dieses Verhältniß gefunden hat. Nur Folgendes finde zur Erläuterung hier eine Stelle. Nach §. 105 ist die Sehne des Sextanten gleich dem Radius; folglich läßt sich der Radius genau sechsmal an der Peripherie herumtragen. Werden je zwei zunächst liegende Theilungspuncte durch eine Gerade verbunden, so entsteht nach §. 124 ein regelmäßiges Sechseck. Die sechs Seiten des Sechsecks sind nun = 6 Radien oder 3 Durchmessern. Das Sechseck füllt aber den Kreis nicht vollständig aus, und die Peripherie ist also noch etwas größer, als 3 Durchmesser. Zeichnet man um den Kreis ein Sechseck, so ist dieses größer, als der Kreis und also ist auch der Umfang des Sechsecks größer, als die Peripherie. Ist die Seite des eingeschriebenen Sechsecks = 1, so ist bei dem umschriebenen Sechseck die Seite = $1_{,1547}$ (was mit Hilfe der Gleichungen gefunden wird).

Der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks ist also = 6 Radien = 3 Durchmesser; der Umfang des umschriebenen Sechsecks aber = 6 × $1_{,1547}$ = $6_{,9282}$ Radien = $3_{,4641}$ Durchmesser. Der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks ist aber offenbar kleiner und der des umschriebenen Sechsecks größer, als die Peripherie, und die wahre Größe der letzteren liegt also nothwendig zwischen 3 und $3_{,4641}$ Durchmesser. Werden statt der Sechsecke aber Zwölfecke ein- und umschrieben, und rechnet man mittelst der Gleichungen die Seiten und den Umfang der Vielecke aus, so ist leicht einzusehen, daß die Umfänge derselben der Peripherie schon näher kommen, als die Umfänge der Sechsecke. Wenn man nun fortfährt, in ähnlicher Weise den Umfang des Vierundzwanzigecks, des Achtundvierzigecks ꝛc. auszurechnen, so findet man immer annähernder die Größe der Peripherie. So gelang es endlich, den Umfang eines eingeschriebenen Vielecks von 32768 Seiten und eines umschriebenen Vielecks von eben so viel Seiten $3_{,1415}$ . . . Durchmesser

groß zu finden. Vielecke von so vielen Seiten sind aber dem Kreise gleich zu achten, obgleich das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie nie ganz genau, sondern nur annäherungsweise durch Zahlen ausgedrückt werden kann.

b) Schon Archimedes fand das Verhältniß 7:22 und 71:223 (d. h. ist der Durchmesser = 7, so ist die Peripherie = 22; Ludolph von Cöln (holl. Ludolf van Ceulen) $1:3,_{141592}\ldots$ oder 100:314; Peter Metius 113:355 u. s. w.

c) Setzt man den Durchmesser = 1, so ist also die Größe der Peripherie = $\frac{22}{7}$ oder $\frac{314}{100}$ *) oder $\frac{355}{113}$. Wir wollen diese Größe der Peripherie immer **Peripheriezahl** nennen.

d) Der Kürze wegen bedeute bei der Berechnung des Kreises: r = Radius; d = Durchmesser; p = Peripherie, π **) = Peripheriezahl; F = Flächeninhalt des Kreises; d ist also = 2 r und $r = \frac{d}{2}$.

§. 215. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem halben Radius und der Peripherie $= \frac{1}{2} r \times p$.

Beweis: Stellt man sich den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten vor, so kann er nach §. 138. Zus. in ein gleich großes △ verwandelt werden, wenn man als Grundlinie des △ den Umfang, d. h. die Peripherie und als Höhe den Radius nimmt. Da man aber den Inhalt eines △ dadurch findet, daß man die Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt (§. 210), so findet man also auch den Inhalt eines Kreises, wenn man den Umfang mit dem halben Radius multiplicirt; folglich ist des Kreises $F = \frac{1}{2} r \times p$.

Zus. Es ist einerlei, ob man den halben Radius mit der Peripherie, oder den ganzen Radius mit der Peripherie multiplicirt und das Product durch 2 dividirt, oder ob man den Durchmesser mit der Peripherie multiplicirt und das Product durch 4 dividirt. Es ist also $F = \frac{1}{2} r \times p = \frac{r \times p}{2} = \frac{d \times p}{4}$; denn ist $r = 3\frac{1}{2}'$ und $p = 22'$, so ist $\frac{1}{2} r \times p = \frac{7}{4} \times 22 = 38\frac{1}{2}\,\square'$ und $\frac{r \times p}{2} = \frac{3\frac{1}{2} \times 22}{2} = 38\frac{1}{2}\,\square'$ und $\frac{d \times p}{4} = \frac{7 \times 22}{4} = 38\frac{1}{2}\,\square'$.

---

*) Diese Peripheriezahl, welche den Berechnungen gewöhnlich zu Grunde gelegt wird, heißt nach ihrem Erfinder auch: Ludolphine.

**) π ist der griechische Buchstabe p und wird pi ausgesprochen.

§. 216. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt des Kreises verhält sich zum Quadrate seines Durchmessers wie 785 : 1000.

Beweis: Denkt man sich den Durchmesser in 100 gleiche Theile getheilt, so erhält die Peripherie 314 solcher Theile (§. 214 b). Der Flächeninhalt des Kreises ist dann $25 \times 314 = 7850$ (§. 215) und das Quadrat des Durchmessers $= 100 \times 100 = 10{,}000$ (§. 209); also verhält sich der Flächeninhalt des Kreises zum Quadrate seines Durchmessers wie 7850 : 10,000 oder 785 : 1000.

Zus. 1. Kreisflächen verhalten sich also zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder auch wie die Quadrate ihrer Radien.

Zus. 2. Ist der Halbmesser eines Kreises A (Fig. 11) noch einmal so groß, als der eines andern Kreises B, so ist die Peripherie von A auch noch einmal so groß, als die von B und der Flächeninhalt von A ist 4 mal so groß, als der von B; denn $c\,a^2 = 4 \times b\,a^2$. (Vergl. §. 167. Anmerk.)

Zus. 3. Mittelst obigen Verhältnisses kann der Flächeninhalt eines Kreises gefunden werden, dessen Durchmesser bekannt ist. Ist z. B. der Durchmesser $= 5'$, so ist seine Quadratfläche $= 25 \square'$ und es verhält sich $1000 : 785 = 25 : x$, folglich $x = 19\frac{5}{8} \square'$.

§. 217. Aufgabe.

Zu einem Kreise, von welchem nur die Peripherie, oder der Durchmesser, oder der Halbmesser oder der Flächeninhalt bekannt ist, mit Hilfe der im §. 214 b angeführten Peripheriezahlen die übrigen Größen zu finden.

Auflösung: 1) Nach §. 214 verhält sich $p : d = 22 : 7$; ist $d = 1$, so ist $p = \pi$; also verhält sich $1 : d = \pi : p$. Daher ist $p = \frac{d \times \pi}{1} = n \times \pi$, und da $d = 2\,r$, so ist auch $p = 2\,r \times \pi$.

2) $r = \frac{d}{2}$; weil nun $p = 2\,r \times \pi$, so ist auch $2\,r = \frac{p}{\pi}$ und $r = \frac{\frac{1}{2}p}{\pi} = \frac{p}{2\,\pi}$.

3) $d = 2\,r$: weil nun $p = d \times \pi$, so ist $d = \frac{p}{\pi}$, oder weil $d = 2\,r$ und $2\,r = \frac{p}{\pi}$, so ist auch $d = \frac{p}{\pi}$.

4) Nach §. 215 ist $F = \frac{r \times p}{2}$; setzt man nun $2\,r \times \pi$ statt p, so ist auch $F = \frac{r \times 2\,r \times \pi}{2} = r \times \frac{2\,r}{2} \times \pi = r \times r \times \pi = r^2 \times \pi$.

5) Setzt man in der Formel: $F = r \times \frac{2r}{2} \times \pi$ für $\frac{2r}{2}$ den Ausdruck $\frac{d}{2}$ und für r ebenfalls $\frac{d}{2}$, so ist $F = \frac{d}{2} \times \frac{d}{2} \times \pi = \frac{d \times d \times \pi}{4} = \frac{d^2 \times \pi}{4}$.

6) Weil $F = r^2 \times \pi$, so ist $r^2 = \frac{F}{\pi}$ und $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

7) Weil $2r = d$ und $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$, so ist auch $d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

8) Setzt man in der Formel: $F = \frac{r \times p}{2}$ für den Ausdruck r den Ausdruck $\frac{p}{2\pi}$, so ist auch $F = \frac{p}{2\pi} \times \frac{p}{2} = \frac{p \times p}{4\pi} = \frac{p^2}{4\pi}$.

9) Weil $F = \frac{p^2}{4\pi}$, so ist $p^2 = F \times 4\pi = 4F \times \pi$ und $p = \sqrt{(4F \times \pi)} = 2\sqrt{(F \times \pi)}$.

Stellt man die nun entwickelten Formeln zusammen, so sind sie folgende:

Nr. 1) $p = d \times \pi$	Nr. 8) $d = 2r$
„ 2) $= 2r \times \pi$	„ 9) $= \frac{p}{\pi}$
„ 3) $= 2\sqrt{(F \times \pi)}$	„ 10) $= 2\sqrt{\frac{F}{\pi}}$
„ 4) $r = \frac{d}{2}$	„ 11) $F = r^2 \times \pi$
„ 5) $= \frac{\frac{1}{2}p}{\pi}$	„ 12) $= \frac{d^2 \times \pi}{4}$
„ 6) $= \frac{p}{2\pi}$	„ 13) $= \frac{p^2}{4\pi}$.
„ 7) $= \sqrt{\frac{F}{\pi}}$	

In Worte übertragen heißen diese Formeln:

a) Man findet den Umfang ($= p$),
   α) wenn man den Durchmesser mit der Peripheriezahl multiplicirt;
   β) wenn man den doppelten Halbmesser mit der Peripheriezahl multiplicirt;
   γ) wenn man die Quadratwurzel aus dem Producte des Flächeninhaltes mit der Peripheriezahl doppelt nimmt.

b) Man findet die Größe des Halbmessers ($= r$),
   α) wenn man den Durchmesser durch 2 dividirt;
   β) wenn man die halbe Peripherie durch die Peripheriezahl dividirt;
   γ) wenn man die ganze Peripherie mit der doppelten Peripheriezahl dividirt;
   δ) wenn man den Flächeninhalt durch die Peripheriezahl dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

c) Man findet die Größe des Durchmessers ($= d$),
 α) wenn man den Halbmesser doppelt nimmt;
 β) wenn man die Peripherie durch die Peripheriezahl dividirt;
 γ) wenn man den Flächeninhalt durch die Peripheriezahl dividirt, aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht und diese doppelt nimmt.

d) Man findet den Flächeninhalt ($= F$),
 α) wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Peripheriezahl multiplicirt;
 β) wenn man das Quadrat des Durchmessers mit der Peripheriezahl multiplicirt und das Product durch 4 dividirt;
 γ) wenn man das Quadrat der Peripherie mit der 4 mal vergrößerten Peripheriezahl dividirt.

§. 218. Aufgabe.

Den Kreisring zwischen den Peripherien zweier concentrischer ungleicher Kreise zu finden.

Aufl. Berechne den Flächeninhalt beider Kreise und ziehe den Flächeninhalt des kleineren von dem des größeren Kreises ab; die Differenz ist = dem Kreisring. Wenn nun **R** den Halbmesser des großen und **r** den des kleinen Kreises bedeutet, so ist also der Flächeninhalt ($= F$) des Kreisringes $= (R^2 \times \pi) - (r^2 \times \pi) = (R^2 - r^2) \times \pi$; da aber $R^2 - r^2 = (R + r) \times (R - r)$, so ist $F = \pi \times (R + r) \times (R - r)$.

Zus. Da es für den Inhalt eines Kreisringes einerlei ist, ob der kleinere Kreis concentrisch oder excentrisch ist, so gilt die vorstehende Formel auch für einen Kreisring zwischen den Peripherien zweier excentrischer Kreise.

§. 219. Lehrsatz.

Die Länge eines Kreisbogens verhält sich zur Peripherie wie der Centriwinkel zu 360°.

Beweis: Ist (Fig. 253) $\llcorner$ a c b $= R$, so ist der Bogen a b der vierte Theil der Peripherie und der Bogen a b verhält sich also zur Peripherie wie 90° : 360°. Ebenso kann der Beweis für jeden andern Fall geführt werden.

§. 220. Lehrsatz.

Zwei Kreisausschnitte desselben Kreises verhalten sich wie ihre Centriwinkel.

Beweis: Halbire (Fig. 253) a b in d; dann ist $\llcorner$ a c d $=$ $\llcorner$ d c b (§. 108. Zus. 1) und Sector a c d = d c b. Winkel a c d $= \frac{1}{2}$ $\llcorner$ a c b und auch Sector a c d $= \frac{1}{2}$ Sector a c b; folglich verhält sich Sector a c d : Sector a c b $=$ $\llcorner$ a c d : $\llcorner$ a c b. Ebenso kann der Beweis für jeden andern Fall geführt werden.

Zus. Folglich verhält sich die Fläche des ganzen Kreises zur Fläche des Kreisausschnittes wie 360° zur Anzahl der Grade des Centriwinkels, welche zu dem Bogen gehören.

§. 221. Aufgabe.

Aus der Größe des Centriwinkels die Länge des zu demselben gehörigen Bogens zu finden.

Auflösung: Ist der Centriwinkel $=x$, so ist der Bogen $=\frac{r \times \pi \times x}{r}$ $=\frac{x}{180} \times r \times \pi$.

Beweis: Da die Peripherie $=2r \times \pi$ ist (§. 217. Nr. 2), so ist der Bogen zu 1 Grade $\times \frac{2r \times \pi}{360} = \frac{r \times \pi}{180}$ und der Bogen zu einem Centriwinkel von x Graden $=\frac{r \times \pi}{180} \times x = \frac{r \times \pi \times x}{180} = \frac{x}{180} \times r \times \pi$. Oder wenn l die Länge des Bogens, p die Peripherie und x die Anzahl der Grade des Centriwinkels bedeutet, so verhält sich $l : p = x : 360°$ (§. 219), folglich ist $l = \frac{p \times x}{360°}$ und $p = \frac{360° \times l}{x}$ und $x = \frac{l \times 360°}{p}$.

§. 222. Aufgabe.

Aus der Größe des Centriwinkels den Flächeninhalt des Ausschnittes zu finden.

Aufl. Ist der Centriwinkel $=x$, so ist der Ausschnitt $=\frac{r^2 \times \pi \times x}{360}$ $=\frac{x}{360} \times r^2 \times \pi$.

Beweis: F des Kreises ist $=r^2 \times \pi$ (§. 217. Nr. 11), der Ausschnitt von 1° ist also $\frac{r^2 \times \pi}{360}$; ist nun der Centriwinkel $=x$, so ist also auch der dazu gehörige Ausschnitt $=\frac{r^2 \times \pi}{360} \times x = \frac{r^2 \times \pi \times x}{360}$. Oder wenn F die Fläche des Ausschnittes bedeutet, so verhält sich $(r^2 \times \pi) : F = 360° : x$ und folglich ist $F = \frac{r^2 \times \pi \times x}{360}$ und $x = \frac{360 \times F}{r^2 \times \pi}$ und $r = \frac{\sqrt{360 \times F}}{\pi \times x}$. Oder wenn man den Ausschnitt als ein △ betrachtet, dessen Grundlinie der Kreisbogen und dessen Höhe der Halbmesser ist und wenn F den Inhalt des Ausschnittes und l die Länge des Kreisbogens bedeutet, so ist $F = \frac{l \times r}{2}$ und $l = \frac{2 \times F}{r}$ und $r = \frac{2 \times F}{l}$.

Zus. Den Flächeninhalt eines Kreissegmentes findet man, wenn man von dem Kreisausschnitte das △ abzieht, welches von den beiden Radien und der Sehne gebildet wird.

Uebungsaufgaben *).

314) Wenn der Durchmesser der Erde 1720 Meilen lang ist, wie groß ist der Umkreis derselben?

315) Ein Baumstamm hat $5\frac{1}{4}''$ d d im Durchmesser, wie groß ist sein Umfang?

316) Der Halbmesser eines Kreises beträgt $420'$; wie groß d d ist die Peripherie?

317) Der Umfang der Erde ist 5400 Meilen; wieviel Meilen enthält ein Kreisbogen von 1°?

318) Der Umfang eines Kreises beträgt $6'\,4''$ d d; wie lang ist der Bogen von 45°?

319) Ein Kreisbogen ist $4'$ lang und die Kreislinie, zu der er gehört, ist $24'$ lang; wie viel Grade faßt der Kreisbogen?

320) Die Peripherie eines Kreises beträgt 450^{0} d; wie groß (d) ist der Halbmesser?

321) Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 615 $\square^{0}$ 44 $\square'$ d; wie groß (d) ist der Halbmesser?

322) Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, wenn sein Umkreis $45'$ hat?

323) Wie dick ist eine Säule, welche $5'\,7''$ d d Umfang hat?

324) Wenn die Fläche eines Kreises 615 $\square^{0}$ 44 $\square'$ d beträgt; wie groß ist die Peripherie?

325) Ein runder Tisch soll für 12 Personen Platz gewähren; wenn nun für jede Person $2\frac{1}{2}'$ Platz gerechnet wird, wie groß (d d) muß der Durchmesser werden?

326) Der Umfang eines Baumes ist $6\frac{1}{2}'$; welchen Durchmesser hat er?

327) Wie groß ist der Inhalt der 5 Kreise, deren Durchmesser 1^{0}, $4'$, $5\frac{1}{2}''$, 5^{0}, $3\frac{1}{2}'$ d d beträgt?

328) Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Peripherie $224'$ d d groß ist?

329) Der Umfang eines Baumstammes an der Schnittfläche ist $8'\,7''\,5'''$ d d; wie groß ist die Schnittfläche?

330) Der Durchmesser eines Baumes ist $3'\,5''$ d; wie groß ist seine Schnittfläche?

331) Ein kreisrunder Saal von $36'$ Durchmesser soll gebrettert werden; 1 $\square'$ wird mit 12 Kr. bezahlt; was kostet der ganze Saal?

332) Der Boden eines Bräubottichs hat unten am Boden einen Durchmesser von $6\frac{1}{2}'$, oben aber von $4\frac{1}{2}'$; um wie viel ist die erstere Fläche größer, als die zweite?

333) Wie groß ist der Kreisring zwischen der Peripherie zweier concentrischer Kreise, wenn der Durchmesser des einen $1^{0}\,11'\,10''$ d d und der des andern $1^{0}\,2'\,3''$ d d ist?

334) In einem kreisrunden See, der $400'$ als Halbmesser hat, befindet sich eine kleine kreisrunde Insel, so daß das Wasser nur noch einen $150'$ breiten Ring bildet; wie groß ist die Wasserfläche?

335) Der Durchmesser eines Kreises ist $340'$; wie lang ist ein Bogen von 50^{0}?

336) Der Bogen eines Kreises von $45'$ Durchmesser ist $40'$ lang, wie viel Grad umspannt der Bogen?

337) Der Halbmesser eines Ausschnittes ist $6'$ und seine Bogenlänge $8'$; wie groß ist seine Fläche?

338) Wie groß ist die Länge des Kreisbogens, wenn die Fläche des Ausschnittes 22 $\square'$ beträgt und der Halbmesser $= 15'$ ist?

339) Wie groß ist die Fläche eines Ausschnittes, wenn sein Halbmesser $12'$ und sein Centriwinkel 90^{0} beträgt?

340) Wie groß ist der Radius eines Ausschnittes, dessen Flächeninhalt 24 $\square^{0}$ beträgt und von dem die Länge des Bogens $= 30^{0}$ ist?

XVII. Einiges von der Feldmeßkunst.

§. 223. Erklärung.

Die Feldmeßkunst beschäftigt sich mit dem Ausmessen von Linien,

*) Wo das Maß nicht speciell bezeichnet ist, ist immer Duodecimalmaß gemeint.

Winkeln und Flächen auf der Oberfläche der Erde und stützt sich dabei auf die theoretischen Sätze der Geometrie.

§. 224. Erklärungen.

a) Eine Ebene, welche mit der Richtung des Senkblei's zusammenfällt, heißt Vertical-Ebene.

b) Eine Ebene, auf welcher eine Vertical-Ebene senkrecht steht, heißt Horizontal-Ebene.

§. 225. Erklärungen.

a) Bestimmt man die Entfernung zweier Puncte einer Horizontal-Ebene, so nennt man dies eine Distanz- oder Weiten-Messung.

b) Mißt man die Entfernung zweier, senkrecht über einander stehender Puncte einer Vertical-Ebene, so nennt man dies Höhen-Messung.

c) Soll im Allgemeinen bestimmt werden, um wieviel ein Punct der Erdoberfläche höher oder tiefer liegt, als ein anderer, so geschieht dies durch das Nivelliren.

d) Mißt man die Umfangslinien, Diagonallinien und Winkel einer Fläche entweder alle, oder, wenn es hinreichend ist, nur einige und zeichnet man mittelst eines verjüngten Maßstabes auf Papier eine kleinere, aber ähnliche Figur, so nennt man diese Zeichnung einen Grundriß. Doch sagt man auch von einer einzigen Linie, die man gemessen und nach dem verjüngten Maßstabe auf Papier gezeichnet hat; man habe sie in Grund gelegt.

Anmerk. Die meisten der in diesem Abschnitte vorkommenden Aufgaben können nur mittelst der Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Figuren gelöst werden. Daher ist der Abschnitt XIV vorher zu wiederholen.

§. 226. Erklärungen.

Die wichtigsten Werkzeuge, deren man beim Feldmessen sich bedient, sind folgende:

a) Absteckstäbe; sie sind 1 Zoll dicke, 6 Fuß lange, runde Stäbe, deren eines Ende mit einer eisernen Spitze versehen ist. Damit man sie besser in der Entfernung sehen kann, sind sie im Abstand eines Schuh abwechselnd weiß, schwarz oder roth angestrichen (Fig. 261 a c u. s. w.).

b) Meßfahnen; sie sind 7 Fuß lange ähnliche Stangen mit einer kleinen Fahne.

c) Senkblei; es ist ein Faden, an welchem ein schwerer Körper, gewöhnlich eine Bleikugel, befestigt ist.

d) Setzwage; sie ist ein hölzernes gleichschenkliges Dreieck mit einem Senkblei und dient dazu, einen Stab (Richtscheit) horizontal zu legen.

e) Gabel; sie ist ein aus Holz gefertigtes Werkzeug (Fig. 254) mit zwei kleinen Zacken, die so weit von einander entfernt sind, als die Platte des Meßtisches dick ist, so daß es an dieselbe gesteckt werden kann. Die Gabel dient dazu, um auf dem Meßtische einen Punct (a) zu bezeichnen, der einem Puncte (b) auf der Erdfläche senkrecht gegenüber steht. Man rückt nämlich die Gabel so lange, bis das an dem untern Zacken befindliche Senkblei über dem Puncte b steht.

f) Maßstäbe und Meßketten. Die Stäbe sind dünne Stangen, auf welchen Ruthen, Schuh u. s. w. durch Zeichen angegeben sind. Die Ketten sind von mittelmäßig starkem Drath, jedes Glied 1 Schuh lang.

g) Verjüngte Maßstäbe. (S. §§. 199—205.)

h) Meßtisch; er besteht aus einer beweglichen, aber festzustellenden Tischplatte und einem Fußgestell, dessen 3 Füße weiter und enger gestellt werden können.

i) Diopterlinieal; es dient dazu, entfernte Puncte mit dem Auge und unserm Standpunct in eine gerade Linie zu bringen und besteht aus einem Lineal, gewöhnlich von Messing, 15 Zoll lang, $1\frac{1}{4}$ Zoll breit und 1 bis 2 Linien dick. An jedem Ende des Lineals steht senkrecht auf der breiten Fläche eine etwa 3—4 Zoll hohe kleinere Fläche (Fig. 255). Diese beiden Flächen heißen Diopter. In dem einen Diopter ist eine ganz feine Spalte, eine Oeffnung mit einem sehr feinen und dünnen senkrecht stehenden Messingplättchen, Lamelle genannt, und noch eine Spalte. In dem andern Diopter ist eine ähnliche Oeffnung und Spalte; nur steht die Lamelle dem Lineal näher. Befindet sich das Auge in **A** und schaut es durch die Oeffnung und man rückt das Lineal so lange, bis man durch die Spalte des zweiten Diopters den Gegenstand **B** erblickt, so stehen das Auge **A**, die Lamelle des ersten Diopters, die Spalte des zweiten Diopters und der Gegenstand **B** in einer geraden Linie, und eine Linie, an der Seite des Lineals gezogen, läuft in derselben Richtung und ist also der Linie **AB** parallel. Man nennt dieses Durchsehen durch die Diopter, um einen Gegenstand 2c. zu erblicken, das Visiren. Doch gebraucht man diesen Ausdruck auch dann, wenn Stäbe hinter einander gesteckt werden und man von dem ersten nach den übrigen hinschaut.

k) Winkelkreuz; es besteht entweder aus einem Brettchen (Fig. 256) mit rechtwinklig sich durchkreuzenden Einschnitten, aus einem Kreuz mit senkrechten Stiften (Fig. 258) oder aus zwei rechtwinklig sich durchkreuzenden Diopterlinealen (Fig. 257) auf einem spitzigen Stabe und dient dazu, um rechte Winkel auszustecken, oder eine g. L. auf eine andere senkrecht zu fällen.

l) Astrolabium; es besteht aus einem Gestell mit drei beweglichen Füßen, auf welchem ein zirkelförmiger Ring in Grade, Minuten 2c. getheilt, in horizontaler Richtung sich befindet. Am Centrum ist ein bewegliches Diopterlineal, gewöhnlich noch mit einem Fernrohr versehen. Mit diesem

Instrumente kann die Größe geradliniger Winkel auf dem Felde gemessen und also nach Graden, Minuten rc. angegeben werden.

m) Canalwage zum Nivelliren; sie besteht aus einer Röhre mit zwei senkrecht stehenden gläsernen Cylindern am Ende (Fig. 259). Diese 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß lange Röhre wird mit gefärbtem Wasser gefüllt, und da der Wasserspiegel bei a mit dem bei b immer in einer horizontalen Ebene liegt, so kann man also von a über b in einer horizontalen Richtung sehen. Größere Genauigkeit erreicht man, wenn die Röhre mit Quecksilber gefüllt ist.

n) Latten; sie sind 8 Fuß lange viereckige Stäbe in Schuh und Zoll eingetheilt; an ihnen läßt sich ein Querbrettchen, zur Hälfte weiß und schwarz gefärbt, auf- und abschieben (Fig. 260).

§. 227. Aufgabe.

Zwischen zwei Puncten, a und b, auf dem Felde eine gerade Linie abzustecken und zu messen, wenn man von einem Puncte zum andern sehen und gehen kann.

Aufl. Stecke (Fig. 261) in senkrechter Richtung Stäbe in a und b; stelle Dich einige Schritte vor den Stab a c so, daß dieser den Stab b k zu bedecken scheint, d. h. daß die Seitenränder des Stabes a c mit denen des Stabes b k zusammenfallen, — oder kurz: visire vom Stabe a c nach dem Stabe b k. Laß nun von einem Gehilfen den Stab f g so einstecken, daß seine Seitenränder mit denen des Stabes b k gleichfalls zusammenfallen. Auf die nämliche Weise lasse die Stäbe d e und h i, und, wenn die Linie a b ziemlich lang wäre, noch mehrere senkrecht einsetzen. Nun miß mit Meßstäben oder einer Meßkette die Linien a d + d f + f h + h b, deren Summe der Länge der Linie a b gleich ist.

§. 228. Aufgabe.

Am Ende einer auf dem Felde gezogenen geraden Linie einen in der Horizontalebene der Linie liegenden Perpendikel zu errichten, oder: auf dem Felde einen R auszustecken.

1. Aufl. Ist (Fig. 66) a b die gezogene L. und es soll an b ein Perpendikel errichtet werden, so bilde mit der Meßstange rc. ein beliebiges gleichseitiges △ auf e b, verlängere e c nach d und mache c d = e c, so ist b d der Perpendikel. Beweis: §. 62.

2. Aufl. Ist (Fig. 178) a b die gezogene L., so mache sie = 3 Theilen (etwa 3 Schuh), eine L. a c = 4 Theilen und eine L. b c, welche a c in c berührt, = 5 Theilen, so ist ∟ c a b = R; denn $(ab^2 + ac^2) = bc^2$ (§. 140).

3. Aufl. Soll (Fig. 262) an b ein Perpendikel errichtet werden, so setze in b das Winkelkreuz so, daß ein Querschnitt mit der gezogenen L. a b

zusammenfällt und visire durch den andern Querschnitt nach c und laß in c einen Stab setzen, so ist c b der Perpendikel und also ∟ a b c = R.

§. 229. Aufgabe.

Zu einer auf dem Felde gezogenen geraden Linie a b eine Parallellinie abzustecken.

Aufl. Errichte (Fig. 71) an a und b Perpendikel und mache a c = b d, d. h. so lang, als die Entfernung der || Ll. betragen soll, stecke in c und d Stäbe und dann nach §. 227 zwischen diesen noch andere, so ist c d || a b. Beweis: §. 69.

§. 230. Aufgabe.

Eine krumme Linie, z. B. das Ufer eines Flusses, oder einen Weg &c. in Grund zu legen.

Aufl. Ist a b (Fig. 263) die krumme Linie, so stecke eine g. L. c d als Grundlinie oder Basis möglichst nahe an a b ab; stecke ferner in die Puncte der krummen L., welche die Hauptbiegungen bezeichnen, (a, e, f, g, b) Stäbe und fälle von diesen Puncten mittelst des Winkelkreuzes auf die Basis die Perpendikel a c, e h, f i, g k, b d. Miß nun sowohl diese Perpendikel, als ihre Entfernungen, d. h. die Ll. c h, h i u. s. w., trage nach dem verjüngten Maßstab diese Größen der Ordnung nach auf Papier auf und vereinige die dadurch erhaltenen Puncte a, e, f, g, b durch eine frei gezogene Linie, welche der auf dem Felde um so ähnlicher sein wird, je mehr Perpendikel errichtet worden sind.

Zus. Die L. c d nennt man eine Abscissenlinie und die darauf gezogenen Perpendikel Ordinaten.

§. 231. Aufgabe.

Ein Winkel, den zwei Seiten eines Feldes bilden, auf das Papier zu zeichnen.

1. Aufl. (mit der Meßkette). Soll der ∟ D B E (Fig. 264) gezeichnet werden, so setze in die beiden Schenkel in beliebigen Puncten, etwa in A und C, Stäbe ein, miß die Ll. B A, B C, A C und zeichne nun nach einem verjüngten Maßstabe das △ a b c. Da △ a b c ∾ △ A B C (§. 164), so ist auch ∟ n = ∟ m.

2. Aufl. (mit dem Meßtisch). Stelle (Fig. 265) den Meßtisch über die Spitze des ∟ (B) so, daß der Punct des Meßtisches b genau über dem Puncte B steht, was durch die Gabel leicht zu bewerkstelligen ist. Stecke dann in D und E Stäbe, visire von b nach D und nach E und ziehe b a und b c: so ist ∟ a b c = ∟ D B C, weil b c || B E und b a || B D.

3. Aufl. (mit dem Astrolabium). Stelle das Astrolabium so über den zu messenden ∟, daß das Centrum senkrecht über der Spitze B ist, visire

nach D (Fig. 265) und rücke die Kreisscheibe so, daß der Nullpunct am Diopterlineal anliegt; nun visire nach E und zähle die Grade, welche vom Nullpunct bis zum Diopterlineal sich befinden; sie geben die Größe des ∟ an.

Zus. Soll ein Winkel auf dem Felde ausgesteckt werden, so verfährt man nur umgekehrt, was leicht einzusehen ist; daher auch eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens überflüssig erscheint.

§. 232. Aufgabe.

Eine gerade Linie a b zu messen, wenn man von einem Endpuncte zum andern sehen, aber nicht in gerader Linie gehen kann.

Aufl. Stecke in a und b (Fig. 266) Stäbe und innerhalb derselben noch mehrere bis nahe an das Hinderniß, etwa bis c und d; errichte in c und d die gleich langen Perpendikel c e und d f, stecke die L. e f aus und miß a c + e f + d b, deren Summe = a b ist; denn e f = c d (§. 73 a).

§. 233. Aufgabe.

Eine gerade Linie a b zu messen, wenn man von einem Endpuncte zum andern nicht sehen, aber von einem dritten Puncte o zu beiden Endpuncten sehen und messen kann.

1. Aufl. und Beweis: (mit der Meßkette). Verlängere die L. b o nach c und a o nach d hin (Fig. 267), mache o c = o b und o d = o a, dann ist c d = a b; denn

$$\left.\begin{array}{l} od = oa \\ oc = ob \end{array}\right\} \text{(Verf.)}$$

$$\angle n = \angle m \text{ (§. 22)}$$

$$\triangle cdo \cong \triangle abo \text{ (§. 48)}$$

$$cd = ab \text{ (§. 50. Zus. 3).}$$

Zus. Wenn die Lage des Bodens eine Verlängerung der Ll. b o und a o nicht gestattet, so miß b o und a o und trage von o nach e einen bestimmten Theil der L. a o (etwa den dritten) und von o nach f denselben Theil der L. o b (also auch den dritten), so ist e f der sovielste Theil der L. a b, als o e von a o ist (also der dritte) und a b = 3 × e f. Denn, da die L. e f || a b ist, so ist △ e f o ∼ △ a b o und o e : o a = e f : a b (§. 156); ist daher o e = $\frac{1}{3}$ a o, so ist auch e f = $\frac{1}{3}$ a b und daher a b = 3 × e f.

2. Aufl. und Beweis: (mit dem Meßtisch). Stelle den Meßtisch über o (Fig. 268), so daß der Punct o des Meßtisches senkrecht über dem o des Erdbodens steht, visire von o nach a und nach b und ziehe auf dem Tische Linien in dieser Richtung; miß hierauf o a und o b und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe von o nach d und von o nach e; dann ist △ d e o ∼ △ a b o und also die nach dem verjüngten Maßstabe gefundene Länge d e = a b.

3. Aufl. Suche (Fig. 269) mit Hilfe des Winkelkreuzes den Punct o auf, so daß ∟ a o b = R, miß o a und o b; dann ist $ab = \sqrt{(ao^2 + bo^2)}$ (§. 143. Zus.).

Zus. Auch mit dem Astrolabium kann der ∟ a o b gemessen und nach dem Messen der Ll. o a und o b das dem größeren △ ähnliche △ d e o (Fig. 268) gezeichnet werden.

§. 234. Aufgabe.

Eine gerade Linie a b zu messen, wenn man von a nach b sehen, aber von einem dritten Punct o nur nach b messen kann.

1. Aufl. und Beweis: (mit der Meßkette). Setze (Figur 270) in einen Punct c einen Stab so, daß c mit b und a in derselben Verticalebene liegt, visire nun von b über o nach d und von c über o nach e, mache o d = o b und o e = o c; nun setze in der Verlängerung der L. e d so einen Stab in f, daß f und o und a in derselben Verticalebene liegen, so ist a b = d f; denn

o b = o d } Verf.
o c = o e }
∟ n = ∟ m (§. 22)
△ b c o ≌ △ d e o (§. 48)
∟ z = ∟ x (§. 50. Zus. 3)
b c || d a (§. 32. Zus. 1) und folglich auch a c || e f.

Ferner ist o b = o d (Verf.)
∟ q = ∟ p (§. 22)
∟ s = ∟ r (§. 27)
△ a b o ≌ △ d f o (§. 49)
a b = d f (§. 50. Zus. 3).

2. Aufl. (mit dem Meßtisch). Stelle (Fig. 271) den Meßtisch über den Punct b, visire von b nach a und o und ziehe auf dem Meßtisch die nöthigen Linien. Hierauf miß auf dem Felde b o, trage diese Länge auf dem Meßtisch von b nach o auf, setze diesen dann so über den Punct o des Feldes, daß der Punct o des Meßtisches senkrecht über dem Punct o des Feldes steht und richte das Tischchen so lange, bis die Puncte o, d und b in gerader Richtung oder in derselben Verticalebene liegen; dann ist die Linie des Meßtisches, welche von d in der Richtung nach c läuft || b a. Visire hierauf von o nach a und ziehe die treffende Linie, wodurch der Punct c bestimmt wird. Nun ist △ c d o ∾ △ a b o und also c d nach dem verjüngten Maßstab die gesuchte Länge.

§. 235. Aufgabe.

Eine gerade Linie a b zu messen, zu deren Endpuncten nicht gemessen werden kann.

1. Aufl. und Beweis: (mit dem Astrolabium). Stecke eine ziemlich lange Standlinie c d (Fig. 272) aus und halbire sie in o, miß dann $\angle m$ und mache $\angle n = \angle m$; miß ferner $\angle q$ und mache $\angle p = \angle q$. Hierauf stecke einen Stab in e so, daß er mit o und b, und einen andern Stab in f so, daß er mit o und a in derselben Verticalebene liegt; dann ist $ef = ab$; denn

$co = od$ } (Vers.)
$\angle m = \angle n$ }
$\angle r = \angle u$ (§. 22)
$\triangle coa \cong \triangle dof$ (§. 49)
$ao = of$ (§. 50. Zus. 3).

Ferner ist $co = od$ } (Vers.)
$\angle p = \angle q$ }
$\angle t = \angle s$ (§. 22)
$\triangle coe \cong \triangle dob$ (§. 49)
$oe = ob$ (§. 50. Zus. 3).

Nun ist $oe = ob$
$of = oa$
$\angle v = \angle w$ (§. 22)
$\triangle eof \cong \triangle aob$ (§. 48)
$ef = ab$)§. 50. Zus. 3).

2. Aufl. (mit dem Meßtische). Stecke (Fig. 273) die Standlinie c d ab und miß sie, stelle dann den Meßtisch so auf die L. c d, daß der Punct c des Meßtisches senkrecht über dem Puncte c des Feldes steht; visire von c nach A, nach B und nach d und ziehe die Visirlinien auf dem Meßtische. Hierauf trage c d nach dem verjüngten Maßstabe auf den Meßtisch von c nach d und stelle den Meßtisch über d des Feldes so, daß der Punct d des Meßtisches senkrecht über dem Puncte d des Feldes steht und die L. c d des Meßtisches mit der auf dem Felde ausgesteckten L. c d in einer Verticalebene liegt. Nun visire von d nach A und B und ziehe die Visirlinien, welche die zuerst gezogenen in a und b durchschneiden, und miß mit dem verjüngten Maßstabe die L. a b, welche der Länge der gesuchten L. A B gleich ist. Der Beweis folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle$; a b läuft nämlich $\parallel$ A B und daher ist $\triangle abd \sim \triangle ABd$.

§. 236. Aufgabe.

Die Breite a b eines Flusses zu finden.

Aufl. u. Beweis: Stecke (Fig. 274) in a und b Stäbe und längs des Flusses eine Standlinie a d aus, halbire sie in c und mache $\angle cde = \angle bac$. Hierauf stecke einen Stab in die L. d e so, daß die Puncte e und c und b in einer Verticalebene liegen; dann ist $de = ab$ und Du

brauchst also blos d e zu messen, um die Breite des Flusses zu finden. Die beiden △ sind nämlich congruent; denn

$$\left.\begin{array}{r} ac = cd \\ \llcorner bac = \llcorner cde \end{array}\right\} \text{(Vers.)}$$
$$\llcorner bca = \llcorner dce \text{ (§. 22)}$$
$$\overline{\triangle abc \cong \triangle dec \text{ (§. 49)}}$$
$$\overline{ab = de \text{ (§. 50. Zus. 3)}}.$$

§. 237. Aufgabe.

Das Gefäll eines Wassers oder das Steigen und Fallen einer Linie zu messen (nivelliren).

Aufl. Soll die L. b c (Fig. 275) nivellirt werden, so stecke in b und c Latten (§. 226 n), stelle die Canalwage innerhalb der beiden Endpuncte (in a) auf, visire über die Wasserfläche der Wage und lasse von einem Gehilfen die verschiebbaren Querbrettchen in e und d feststellen, miß dann b e $= 2'$ und c d $= 5\frac{1}{2}'$, so gibt die Differenz der beiden Größen an, um wieviel b höher, als c, oder c niedriger, als b liegt, nämlich: $5\frac{1}{2} - 2 = 3\frac{1}{2}'$.

§. 238. Aufgabe.

Die Höhe eines Gegenstandes, z. B. eines Thurmes, zu finden, wenn man bis zum untern Theile des Gegenstandes hinmessen kann.

1. Aufl. (mit dem Astrolabium). Stelle das Astrolabium oder auch den Meßtisch in die Richtung einer Verticalebene und miß von einem beliebigen Puncte (d) aus den ∟ x und die L. c a (Fig. 276). Die Höhe des Astrolabiums c d ist || a e und da auch a c || e d, so ist c d = a e und e d = a c. Ziehe nun nach einem verjüngten Maßstab e d (= a c), setze bei d den ∟ x an und errichte in e einen Perpendikel so, daß er den verlängerten Schenkel des ∟ x in b trifft, so ist das klein gezeichnete △ dem größern ähnlich und also die Länge e b nach dem verjüngten Maßstabe zu finden. Addirt man zu derselben die Höhe des Astrolabiums, nämlich die L. a e (= c d), so gibt die Summe (e b + a e) die Höhe a b.

2. Aufl. (mit 2 Stäben). Ist die Höhe a b (Fig. 277) zu messen, so stecke in ziemlicher Entfernung einen 3 Schuh langen Stab e d senkrecht in die Erde und in eine Spalte des Stabes einen zweiten f g. Hierauf visire von g nach f und b, d. h. rücke den Stab f g so lange, bis das Auge, welches in g sich befindet, über den Stab g f hinweg den Punct b erblickt, und also b, f, d und g in einer g. L. liegen. Visire nun, ohne den Stab f g zu verrücken, von f nach g und lasse den Punct c auf der Erde von einem Gehilfen bezeichnen. Miß e c und e a und zeichne nun nach einem verjüngten Maßstabe die △ c e d und c a b, so ist a b, wenn diese L. mit dem verjüngten Maßstabe gemessen wird, die gesuchte Höhe (Beweis: §§. 156 u. 161).

Zus. Durch zwei Stäbe läßt sich die Höhe a b (Fig. 278) auch noch auf folgende Art finden: Stecke einen Stab c d von etwa 6—8 Schuh Länge in einiger Entfernung von a b senkrecht in die Erde und ebenso einen zweiten, aber kleineren Stab e f, doch so, daß f, d und b in einer g. L. liegen. Miß nun e c und c a, und da die Höhe der Stäbe bekannt ist, so läßt sich nun recht wohl nach dem verjüngten Maßstab die Höhe a b finden. Ziehe nämlich die L. a e, errichte in c und e Perpendikel = der Länge der Stäbe, ziehe eine g. L. in der Richtung f, d, b, so ist der Perpendikel aus a, welchen die schiefe L. in b trifft, = der Höhe a b. (Beweis: §§. 156 u. 161.)

§. 239. Aufgabe.

Eine wagrechte Linie über eine Anhöhe zu messen.

Aufl. Nimm einen Stab (Fig. 279) a b von beliebiger, aber in Schuh und Zoll eingetheilter, Länge (etwa 10 Schuh lang), befestige an dem einen Ende a ein Senkblei, dessen Schnur verlängert und verkürzt werden kann. Lege nun diesen Stab in wagrechter Richtung an die Anhöhe an und bezeichne den Punct b; lege ihn dann in weiterer Höhe so an, daß das Senkblei auf den Punct b fällt und fahre so fort und addire zuletzt die einzelnen Längen, welche der L. A B gleich sind.

§. 240. Aufgabe.

Eine geradlinige Figur, innerhalb welcher man nach allen Ecken hin ausgesteckte Linien messen kann, in Grund zu legen.

1. Aufl. (mit der Meßkette). Miß die Seiten der Figur (Fig. 280) und von einem Ecke (etwa von a) die Diagonalen a e, a d, und a c und verfertige nun nach einem verjüngten Maßstabe auf dem Papier eine kleinere aber ähnliche Figur, was keine Schwierigkeiten macht, da die Seiten der einzelnen △ alle bekannt sind. Beweis: §. 166.

2. Aufl. (mit dem Winkelkreuz und der Meßkette). Nimm irgend eine Seite der Figur, etwa a b (Fig. 281) als Basis an, verlängere sie, soweit es nöthig erscheint, nach beiden Seiten und fälle mittelst des Winkelkreuzes von den Ecken der Figur Perpendikel auf die Basis, also f g, e h, d i und c k. Miß sowohl diese Perpendikel, als die Entfernungen der Puncte g a, a h, h b, b i, i k und zeichne nun auf dem Papiere nach einem verjüngten Maßstabe eine kleinere Figur. Ziehe nämlich eine g. L. g k und errichte aus den Puncten g, h ɩc. Perpendikel von der gemessenen Länge, so werden dadurch die Puncte f, e u. s. w. bestimmt, und es kann also leicht eine verkleinerte ähnliche Figur gezeichnet werden.

3. Aufl. (mit dem Meßtische). Nimm innerhalb der Figur einen beliebigen Punct o an (Fig. 282), miß von demselben die g. L. in die Ecken der Figur, also o A, o B, o C u. s. w.; stelle nun den Meßtisch so über o,

daß der Punct o des Meßtisches senkrecht über dem Puncte o des Feldes steht, visire von o nach den Ecken der Figur und ziehe auf dem Meßtische die Visirlinien. Mache nun nach einem verjüngten Maßstabe o a = der gemessenen L. o A, ferner o b = o B u. s. w., so bekommst Du die Ecken a, b, c u. s. w., welche, durch g. Ll verbunden, die Figur verkleinert darstellen. Der Beweis folgt aus §. 161; denn a b || A B, folglich △ a b o ∾ △ A B o, und so bei jedem △.

Zus. Auch mit dem Astrolabium läßt sich diese Aufgabe lösen, wenn man dieses Instrument in o stellt und die ∠∠ A o F, F o E, E o D u. s. w. und mit der Meßkette die L. o A, o F, o E u. s. w. mißt und darnach eine ähnliche Figur entwirft.

§. 241. Aufgabe.

Eine geradlinige Figur, in welcher man von den Endpuncten einer gezogenen Standlinie nach den Ecken visiren kann, in Grund zu legen.

Aufl. Stecke die Standlinie f g (Fig. 283) aus, stelle den Meßtisch über f, so daß der Punct f der auf dem Meßtische gezogenen Standlinie senkrecht über dem Punct f des Feldes steht und f g des Meßtisches mit f g des Feldes in derselben Verticalebene sich befindet. Visire nun nach den Ecken der Figur und ziehe die Visirlinien. Stelle dann den Meßtisch über g so, daß der Punct g des Meßtisches senkrecht über dem Puncte g der Standlinie steht und die Standlinie des Meßtisches mit der Standlinie des Feldes in derselben Verticalebene liegt. Hierauf visire von g aus in die Ecken der Figur, ziehe die Visirlinien, welche die zuerst gezogenen durchschneiden und vereinige die Durchschnittspuncte durch g. Ll., wodurch auf dem Meßtische eine kleine Figur entsteht, welche der größern ähnlich ist. (Beweis: §§. 161 u. 166.)

§. 242. Aufgabe.

Eine geradlinige Figur, innerhalb welcher keine Standlinie gezogen werden kann, deren Seiten und Winkel aber gemessen werden können, in Grund zu legen.

1. Aufl. Miß alle Umfangslinien (Fig. 284), notire ihre Längen, verlängere dann b a nach f und g a nach e und miß die Ll. f a, a e und e f. Zeichne nach einem verjüngten Maßstabe das △ f a e, so ist ∟ f a e = ∟ g a b. In dieser Weise suche nun die Größe aller ∠∠ an den Ecken der Figur und entwirf nach den gemessenen Umfangslinien, die der Ordnung nach mit den gemessenen ∠∠ zusammengesetzt werden, eine der größeren ähnliche kleinere Figur. Beweis: §. 163.

Zus. Die ∠∠ der Figur können auch mit dem Astrolabium gemessen werden.

2. Aufl. Miß (Fig. 285) die Ll. A B, B C und C D (d. h. alle Umfangslinien, weniger eine), setze den Meßtisch in A in der schon mehrmals angedeuteten Weise, visire nach B und D und mache a b = A B; setze dann den Meßtisch über B, so daß b senkrecht über B und b a in der Richtung B A ist, visire nach C und mache b c = B C; endlich stelle den Meßtisch über C und zwar c senkrecht über C und c b in die Richtung C B, visire nach D und mache c d = C D; dann ist a b c d ∾ A B C D.

§. 243. Aufgabe.

Eine krummlinige Figur, innerhalb welcher man nach allen Seiten hin messen kann, in Grund zu legen.

Aufl. Stecke innerhalb der krummlinigen Figur eine andere beliebige geradlinige Figur, etwa a b c d (Fig. 286) aus, stecke ferner in die Puncte der krummen Umfangslinie, welche die Hauptbiegungen bezeichnen, Stäbe und fälle von denselben auf die Seiten der geradlinigen Figur mit dem Winkelkreuz Perpendikel. Miß hierauf sowohl die Seiten der geradlinigen Figur, als die Perpendikel und deren Abstände, zeichne dann nach einem verjüngten Maßstabe die geradlinige Figur und der Reihe nach alle Perpendikel in richtiger Entfernung und vereinige die Endpuncte durch eine Linie aus freier Hand.

§. 244. Aufgabe.

Eine krummlinige Figur, innerhalb welcher man nicht nach allen Seiten hin messen kann, in Grund zu legen.

Aufl. Stecke (Fig. 287) um die krummlinige Figur eine beliebige geradlinige, etwa a b c d, aus, fälle auf die Hauptbiegungen der krummen Umfangslinien Perpendikel; miß ferner die Umfangslinien der geradlinigen Figur, die gefällten Perpendikel und deren Entfernungen und zeichne dann nach einem verjüngten Maßstabe die geradlinige Figur und der Reihe nach alle Perpendikel in richtiger Entfernung und vereinige die Endpuncte der Perpendikel durch eine Linie aus freier Hand.

XVIII. Einiges über die Berechnung der Körper.

§. 245. Erklärungen.

a) Bei der Berechnung der Körper sucht man blos ihre Ausdehnung zu bestimmen und achtet auf ihre Masse nicht.

b) Die Grenzen der Körper sind Flächen; diese können nun wieder Ebenen oder krumme Flächen sein. Die ganze Grenze eines Körpers heißt seine Oberfläche. Besteht die Oberfläche eines Körpers blos aus Ebenen, so nennt man einen solchen Körper Polyedrum oder eckigen Körper;

besteht sie aber aus einer oder mehreren krummen Flächen, so ist er ein **runder**, besteht sie aus krummen und ebenen Flächen, so ist er ein **gemischtflächiger Körper**.

c) Zwei Grenzflächen, welche sich durchschneiden, bilden im Durchschnitte eine **Kante** (Seitenlinie). Sind die sich durchschneidenden Flächen Ebenen, so ist die Kante eine g. L.; sind sie aber krumme Flächen, oder durchschneidet eine Ebene eine krumme Fläche, so ist die Kante eine krumme L.

d) Wenn drei oder mehrere Ebenen so zusammentreffen, daß ihre Durchschnittslinien (Kanten) sich in einem einzigen Puncte schneiden, so bilden sie einen **körperlichen Winkel** oder eine Ecke.

e) Drei Ebenen können keinen körperlichen Raum einschließen; sie bilden blos eine Ecke, und es sind wenigstens vier Ebenen nöthig, wenn ein körperlicher Raum vollständig eingeschlossen werden soll. Zwei Ebenen können blos eine Kante bilden.

f) Ein eckiger Körper heißt **regulär** oder **regelmäßig**, wenn er blos von congruenten regulären ebenen Figuren begrenzt wird.

§. 246. Erklärungen.

a) Das Maß eines Körpers muß wieder ein Körper oder doch wenigstens ein solcher leerer Raum sein, in welchem ein Körper Platz hat. Als Körpermaß gebraucht man in der Geometrie den Würfel, d. h. einen durch 6 Quadrate begrenzten Körper (vergl. §. 247 u. 249).

b) Die Fläche, auf welcher der Würfel steht, und die obere entgegengesetzte Fläche heißen **Grundflächen**, die vier übrigen Quadrate **Seitenflächen**.

c) Ist eine Seite der Grundfläche $= 1^{\circ}$, so heißt der Würfel eine **Kubikruthe** ($\square\square^{\circ}$); ist sie $= 1'$, so heißt er **Kubikschuh** ($\square\square'$); ist sie $= 1''$, so heißt er **Kubikzoll** ($\square\square''$); ist er $= 1'''$, so heißt er **Kubiklinie** ($\square\square'''$).

d) Nach der Decimaleintheilung ist:

$$1\ \square\square^{\circ} = 1000\ \square\square' = 1{,}000{,}000\ \square\square'' = 1{,}000{,}000{,}000\ \square\square'''$$
$$1\ \square\square' = 1000\ \square\square'' = 1{,}000{,}000\ \square\square'''$$
$$1\ \square\square'' = 1000\ \square\square'''$$

und nach der Duodecimaleintheilung:

$$1\ \square\square^{\circ} = 1728\ \square\square' = 2{,}985{,}984\ \square\square'' = 5{,}159{,}780{,}352\ \square\square'''$$
$$1\ \square\square' = 1728\ \square\square'' = 2{,}985{,}984\ \square\square'''$$
$$1\ \square\square'' = 1728\ \square\square'''$$

Anmerk. 1. Als Einheit des franz. Körpermaßes gilt der Kubikmeter (**Mètre cube**), welcher als Maß für Brennholz **Stère** heißt. Die Ober- und Unterabtheilungen sind folgende:

1 Kubik-Myriameter .... = 1,000,000,000,000 Kubikmeter;
1 Kubik-Kilometer .... = 1,000,000,000 „

1 Kubik-Hektometer	=	1,000,000	Kubikmeter;
1 Kubik-Dekameter	=	1000	"
1 Kubik-Meter	=	1	"
1 Kubik-Decimeter	=	0,001	"
1 Kubik-Centimeter	=	0,000001	"
1 Kubik-Millimeter	=	0,000000001	"

Anmerk. 2. Eine bayer. Klafter Brennholz, 6′ breit, 6′ hoch, die Scheiter $3\frac{1}{2}$′ lang, enthält also 126 bayer. Kubikfuß $= 91_{,39}$ par. Kubikfuß.

Eine österreich. Klafter, 6′ breit, 6′ hoch, die Scheiter 3′ lang, enthält 108 österr. Kubikfuß $= 99_{,52}$ par. Kubikfuß.

Eine bayer. Maß (Flüssigkeit) enthält 43 bayer. Decimal-Kubikzoll $= 74_{,304}$ bayer. Duodecimal-Kubikzoll $= 53_{,8923}$ par. Duodecimal-Kubikzoll.

Eine österreich. Maß hat $77_{,41}$ österreich. Duodecimal-Kubikzoll $= - 57_{,72}$ par. Duodecimal-Kubikzoll.

Ein bayer. Eimer Bier, wie er von dem Bräuer an den Wirth abgegeben wird, hat 64 Maß; außerdem hat der Eimer 60 Maß.

Ein österreich. Eimer Bier hat $42\frac{1}{2}$ österreich. Maß; außerdem aber hat der Eimer nur 40 Maß.

Anmerk. 3. Für die Folge ist **L** = Länge; **B** = Breite; **H** = Höhe; **G** = Grundfläche; **K** = kubischer oder körperlicher Inhalt; **O** = Oberfläche.

Uebungsaufgaben.

341) 12 Kubikruthen d sind wie viel Kubikfuß und wie viel Kubikzoll d?
342) 4 Kubikruthen 1526 Kubikfuß, 1412 Kubikzoll d d sind wie viel Kubikzoll d d?
343) $\frac{3}{4}$ Kubikruthen d d sind wie viel Kubikzoll d d?
344) $\frac{1}{8}$ Kubikfuß d d sind wie viel Kubikzoll d d?
345) $45\frac{3}{4}$ Kubikfuß d sind wie viel Kubikzoll d?
346) 34567809 Kubikzoll d sind wie viel Kubikruthen 2c. d?
347) 45678034 Kubikzoll d d sind wie viel Kubikruthen 2c. d d?
348) 864 Kubikfuß d d sind wie viel Kubikruthen d d?
349) 849 Kubikzoll d d sind welch ein Theil des Kubikfuß d d?
350) 1204 Kubikzoll d d sind welch ein Theil der Kubikruthe d d?
351) $\frac{5}{12}$ Kubikfuß d d sind welch ein Theil der Kubikruthe d d?
352) $5\frac{3}{4}$ Kubikzoll d d sind wie viel einer Kubikruthe d d?
353) $6\frac{5}{8}$ Kubikzoll d sind wie viel einer Kubikruthe d?

§. 247. Erklärung.

a) Zwei Körper heißen **congruent**, wenn sie ganz genau in einander passen.

b) Zwei Körper heißen **gleich**, wenn sie sich in gleichviele congruente Stücke zerschneiden lassen. Ihre begrenzten Räume sind also gleich groß, ohne daß sie aber in einander passen.

A) Von den regelmäßigen Körpern überhaupt.

§. 248. Erklärung.

Es gibt nur folgende regelmäßige Körper:

1) das Tetraëder; es ist ein von vier gleichseitigen congruenten △ begrenzter Körper (Fig. 288);

2) Das Oktaëder; es ist ein von acht gleichseitigen congruenten △ begrenzter Körper (Fig. 289);

3) das Ikosaëder; es ist ein von zwanzig gleichseitigen congruenten △ begrenzter Körper (Fig. 290);

4) das Hexaëder oder der Würfel (Kubus); es ist ein von sechs gleichen Quadraten begrenzter Körper (Fig. 291);

5) das Dodekaëder; es ist ein von zwölf gleichen regulären Fünfecken begrenzter Körper (Fig. 292).

Anmerk. 1. Der Körper des Archimedes gehört zwar nicht zu den regelmäßigen Körpern im strengsten Sinne des Wortes, ist aber doch erwähnenswerth; er wird von 18 gleichen Quadraten und 8 gleichen gleichseitigen △ begrenzt (Fig. 293).

Anmerk. 2. Zeichnet man auf steifes Papier die regulären ebenen Figuren, von denen ein regelmäßiger Körper begrenzt wird, so daß er aus diesen gezeichneten Figuren, wenn sie an ihren äußersten Grenzen ausgeschnitten werden, zusammengesetzt werden kann, so nennt man diese Zeichnung ein Netz des Körpers. (S. Anhang.)

B) Vom Prisma.

§. 249. Erklärung.

a) Ein Prisma (Fig. 294) ist ein Körper, der durch zwei geradlinige parallele congruente drei-, vier- oder mehrseitige ebene Figuren als Grundflächen und durch so viele Parallelogramme als Seitenflächen begrenzt ist, als eine jener beiden Figuren Seiten hat. (Fig. 294. 295. 296.)

b) Ein Prisma heißt senkrecht (gerade) oder schief, wenn die Seitenflächen entweder senkrecht (Fig. 294) oder schief (Fig. 295) auf den Grundflächen stehen. Steht aber eine Seitenfläche des Prisma auf einer Grundfläche senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

c) Ein Perpendikel von einer Grundfläche auf die andere (bei einem sehr schiefen Prisma auf deren Vergrößerung) heißt Höhe des Prisma.

d) Ein Prisma heißt drei- (Fig. 294. 295), vier- (Fig. 296) oder vielseitig (Fig. 297), wenn seine Grundflächen Dreiecke, Vierecke oder Vielecke sind.

e) Sind die Grundflächen eines Prisma Parallelogramme, so heißt das Prisma ein Parallelepipedum (Fig. 296). Auch das Parallelepipedum kann senkrecht oder schief sein.

f) Sind sowohl die Grundflächen, als Seitenflächen des Parallelepipedums gleich große Quadrate, so heißt es Würfel, Kubus oder Hexaëder (Fig. 291 vergl. §. 248. 4).

§. 250. Zusätze.

a) Im senkrechten Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke.

b) Im senkrechten Prisma ist die Länge einer Seitenfläche = der Höhe des Prisma.

c) Im Parallelepipedum sind die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und congruent. (Der Beweis dieser 3 Sätze ist leicht zu führen, weil er größtentheils aus den Erklärungen §. 249 fließt.)

§. 251. Lehrsatz.

Jedes mehr, als dreiseitige Prisma läßt sich in so viele dreiseitige Prismen zerlegen, als die Grundfläche von einem Puncte aus durch Diagonalen in Dreiecke zerschnitten werden kann.

Beweis: Ist Fig. 297 ein fünfseitiges Prisma, so läßt sich die Grundfläche f g h i k in 3 △ zertheilen. Legt man nun durch a f und d i, durch b g und d i Ebenen, so entstehen drei dreiseitige Prismen.

Zus. Jedes Parallelepipedum kann also in zwei dreiseitige Prismen zerschnitten werden.

§. 252. Lehrsatz.

Parallelepipeda mit congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis: Legt man nach Fig. 298 die beiden Parallelepipeda so in einander oder denkt man sich wenigstens sie so in einander gelegt, daß die congruente Grundfläche des einen Parallelepipedums mit der des andern in a b c d zusammenfällt, so ist a i e m h d = dem dreiseitigen Prisma b k f l g c; denn die Seiten der beiden Prismen sind einander der Ordnung nach gleich. Es ist nämlich △ a i e ≅ △ b k i (§. 50) und die Gleichheit der einschließenden ⌗ ⌗ erhellt aus §. 294 e. Die beiden in einander gelegten Parallelepipeda bilden aber den von lauter ⌗ ⌗ begrenzten Körper a b c d e k l h; wird nun von ihm das dreiseitige Prisma a i e m h d abgezogen, so bleibt das Parallelepipedum a b c d e f g h und wird das dreiseitige Prisma b k f l g c abgezogen, so bleibt das Parallelepipedum a b c d i k l m; die beiden übrigbleibenden Parallelepipeden sind also gleich (V).

§. 253. Lehrsatz.

Das senkrechte Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene halbirt.

Beweis: Wird das Parallelepipedum (Fig. 299) durch die Diagonalebene a c g e getheilt, so entstehen (§. 251) zwei dreiseitige Prismen, von welchen die Gleichheit der einschließenden Seiten leicht nachzuweisen ist, und da ihre begrenzten Räume gleich sind, so sind die Prismen also selbst gleich und das Parallelepipedum ist halbirt.

Zus. Da nach §. 252 jedes senkrechte Parallelepipedum einem schiefen gleich ist, wenn beide congruente Grundflächen und gleiche Höhe haben, so gilt dieser Lehrsatz auch vom schiefen Parallelepipedum.

§. 254. Lehrsatz.

Prismen von congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis: Sind in den beiden Prismen **a b c e f g** und **A B C E F G** (Fig. 300) die Grundflächen **a b c** und **A B C** congruent und ist die Höhe gleich, stellt man sich jedes Prisma als die Hälfte eines Parallelepipedums vor und denkt man sich die andere Hälfte hinzu, so erhält man Parallelepipeda, welche nach §. 252 gleich sind. Da die obigen Prismen aber die Hälften davon sind, so müssen sie auch gleich sein.

§. 255. Lehrsatz.

Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis: Würden die beiden Prismen **A** und **B** (Fig. 301) in möglichst dünne, aber unter sich gleich dicke Scheibchen zerschnitten, die alle mit der Grundfläche || lägen, so würde die Anzahl der Scheibchen in beiden Prismen gleich groß sein, weil die Höhe in Beiden gleich ist; und da die Scheibchen alle gleich dick sind, gleiche Grundflächen haben und diesen || liegen, so muß die Summe der Scheibchen in **A** gleich sein der Summe der Scheibchen in **B**. d. h. **A = B**.

Anmerk. Dieser Beweis ist freilich eigentlich nicht geometrisch; doch leuchtet die Wahrheit des Lehrsatzes schon aus §. 135 und §. 254 ein; denn wenn Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen gleich sind, so müssen wohl auch Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich sein.

§. 256. Lehrsatz.

Prismen von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis: Ist in den beiden Prismen **A** und **B** (Fig. 302) **a b c = g h k i** und verhält sich **b e : h m = 4 : 3**, so denkt man sich die beiden Prismen durch Ebenen, welche der Grundfläche || sind und durch die Theilungspuncte der Linien **b e** und **h m** gelegt werden, in kleinere Prismen getheilt, welche nach §. 255 alle einander gleich sind. Da nun **A** vier und **B** drei solcher kleineren Prismen enthält, so verhält sich auch **A : B = 4 : 3** d. h. wie ihre Höhen.

Zus. Folglich ist der Lehrsatz auch in seiner Umkehrung wahr: Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

§. 257. Lehrsatz.

Der Rauminhalt eines senkrechten Parallelepipedums ist = dem Producte der Grundfläche mit der Höhe oder

$$K = L \times B \times H \text{ oder } = G \times H.$$

Beweis: Ist A (Fig. 303) der Würfel, welcher als Maß dienen soll (§. 246 a), $= 1$ Kubikschuh und $a\,b = 4'$ und $b\,g = 2'$, so ist $G = 4 \times 2 = 8\,\square'$ (§. 209). Auf jedem Quadratschuh der Grundfläche steht aber ein körperlicher Schuh (Kubikschuh), d. h. ein Körper, welcher 1' lang, 1' breit und 1' hoch ist. Da aber $a\,c = 3'$, so stehen die 8 Kubikschuh der Grundfläche dreimal über einander, folglich ist der körperliche Inhalt des Parallelepipedums $= 4 \times 2 \times 3 = 8 \times 3 = 24$ Kubikschuh oder $K = G \times H$.

§. 258. Zusatz.

Zus. 1. Daraus folgt, daß $L = \frac{K}{B \times H}$ und $B = \frac{K}{L \times H}$ und $H = \frac{K}{B \times L}$ sei.

Zus. 2. Da das schiefe Prisma nach §. 255 einem senkrechten Prisma gleich ist, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, so ist also der Inhalt eines jeden Prisma = dem Product aus der Grundfläche und Höhe.

Zus. 3. Da beim Würfel $L = H = B$, so ist, wenn die Kante des Würfels $= a$ ist, $K = a^3$ und $a = \sqrt[3]{K}$.

Zus. 4. Will man die Seite zu einem Würfel wissen, der doppelt so groß sein soll, als ein gegebener, und bedeutet a die Seite des gegebenen und x die Seite des doppelt so großen Würfels, so ist also $x^3 = 2\,a^3$ und demnach $x = \sqrt[3]{2\,a^3} = a\sqrt[3]{2}$; d. h. man erhält die Seite eines doppelt so großen Würfels, wenn man die Seite des bekannten Würfels mit der Kubikwurzel aus 2 multiplicirt.

§. 259. Lehrsatz.

Man findet die Oberfläche eines jeden Prisma, wenn man den Inhalt der beiden Grundflächen und den aller Seitenflächen addirt.

Beweis: Jedes Prisma ist begrenzt von 2 Grundflächen und so vielen Parallelogrammen, als die Grundflächenfigur Seiten hat; folglich ist auch die Summe des Inhaltes dieser Flächen = der Oberfläche.

Zus. 1. Bei einem senkrechten Prisma ist die Summe der Seitenflächen = einem Rechtecke, dessen eine Seite der Umfang einer Grundfläche und dessen andere Seite die Höhe des Prisma ist. Zuletzt darf nur noch der Inhalt der beiden Grundflächen addirt werden.

Zus. 2. Bei einem schiefen Prisma ist die Summe der Seitenflächen = einem Rechtecke, dessen eine Seite die Länge einer schiefen Kante und dessen andere Seite der Umfang eines, im Vergleich zu den schiefen Kanten senkrechten Durchschnittes ist. Dieser Umfang wird gefunden, wenn auf die schiefen Kanten rings herum Perpendikel gezogen werden. Um die ganze Oberfläche zu finden, wird zuletzt noch der Flächeninhalt der beiden Grundflächen addirt.

Zus. 3. Bei einem Parallelepipedum ist $0 = 2\,[(L \times B) + 2\,(L \times H) + 2\,(B \times H] = 2\,(L \times B + H \times (2\,L + 2\,B)$.

Zus. 4. Da die Oberfläche des Würfels aus 6 gleichen Quadraten besteht, so ist, wenn die Kante des Würfels $= a$ ist, $0 = 6\,a^2$ und $a = \sqrt{\frac{0}{6}}$.

Uebungsaufgaben*).

354) Ein Dach bildet an der Giebelseite ein gleichseitiges △; wenn nun eine Seite dieses △ 50′ und das Dach selbst $8\frac{1}{2}$° lang ist, wie groß ist das Dach?

355) Bei einem senkrechten regulären sechsseitigen Prisma ist eine Seite des Sechsecks = 130″ und die Höhe des Prisma = 320″; wie groß ist der körperliche Inhalt und die ganze Oberfläche desselben?

356) Die oberste Abtheilung eines mit einem Satteldache versehenen Hausbodens ist ein dreiseitiges Prisma; wenn nun die Länge dieser Bodenabtheilung 70′, die Breite 36′ und die Höhe 15′ beträgt, wie viel Klafter Holz zu 6′ Breite, 6′ Länge mit $3\frac{1}{2}$′ langen Scheitern könnten da untergebracht werden?

357) Wie viel Kubikfuß hat ein Balken, 20′ lang, 8″ breit und 7″ dick?

358) Wie viel ein Balken, 3° lang, $1\frac{1}{4}$′ breit und dick?

359) Wie viel kubischen Inhalt hat ein Brett, 24′ lang, 2′ breit und $1\frac{1}{2}$″ dick?

360) Wie viel Kubikfuß hat eine Mauer, die $40\frac{1}{2}$′ lang, $15\frac{1}{2}$′ hoch und 3′ dick ist?

361) Wie viel Backsteine von 5″ Länge, 4″ Breite und 3″ Dicke braucht man zu einer Mauer (ohne Berücksichtigung des Mörtels), die 50′ lang, 10′ hoch und 20″ breit ist?

362) Eine Klafter Holz ist 6′ breit, 6′ hoch und die Scheiter sind 3′ lang; um wie viel ist eine Klafter größer, wenn die Scheiter $3\frac{1}{2}$′ lang sind?

363) Ein Parallelepipedum ist $\frac{3}{4}$′ lang, $\frac{1}{2}$′ breit und $\frac{1}{4}$′ hoch; welches ist sein kubischer Inhalt?

364) Eine vierseitige Säule ist 4′ breit $4\frac{1}{2}$′ lang und $10\frac{3}{4}$′ hoch; welches ist der kubische Inhalt, und wenn sie mit blauem Papier überkleidet werden soll, wie viel Bogen sind nöthig, wenn der Bogen 14″ lang und 12″ breit ist?

365) Ein Saal von viereckiger Gestalt ist 40′ lang, $30\frac{1}{2}$′ breit und $15\frac{1}{2}$′ hoch; welches ist sein kubischer Inhalt?

366) Um einen Canal anzulegen, soll eine Strecke Landes von 10500′ Länge ausgehoben werden; der Canal soll 30′ breit und 8′ tief werden; wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn jede Schachtruthe (= 1° lang und breit und 1′ dick) Erde, die herausgegraben und hinweggefahren wird, mit 45 Kr. bezahlt wird?

367) Ein hölzerner Wassertrog, von Außen 12′ 6″ lang, $3\frac{1}{2}$′ breit und $2\frac{1}{2}$′ hoch, ist 24″ tief; jede der längern Seitenwände ist 4″ und jede der kürzern Seitenwände 10″ stark. a) Wie viel Kubikfuß Holz enthält der Wassertrog? b) Wie viel bayr. Maß und wie viel bayr. Eimer Wasser sind in demselben, wenn er ganz voll ist? c) Wie viel □′ Blech ist nöthig, wenn seine ganze äußere Oberfläche (den Wasserraum ausgeschlossen) damit beschlagen werden soll?

368) Die Seite eines Würfels ist $4\frac{3}{4}$′; welches ist der körperliche Inhalt und wie groß ist die Oberfläche?

369) Die Oberfläche eines Würfels ist 9 □° 51 □′ groß; wie groß ist eine Seite und wie groß der körperliche Inhalt desselben?

370) Welches ist der Kubikinhalt eines Würfels, dessen eine Seite $\frac{5}{8}$′ lang ist?

371) Wie groß ist die eine Seite eines Würfels, dessen körperlicher Inhalt = 163 □□ 625 □□″ ist?

372) Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen eine Seite $3\frac{3}{4}$′ ist?

373) Der körperliche Inhalt eines Würfels ist 3 □□° 176 □□′ 523 □□″; wie groß ist eine Seite und die ganze Oberfläche desselben?

*) Da man beim Ausmessen der Körper gewöhnlich des Duodecimalmaßes sich bedient, so ist die Bezeichnung dieses Maßes bei diesen und allen noch folgenden Uebungsaufgaben weggelassen worden, und es ist also immer das Duodecimalmaß gemeint.

C) Von dem Cylinder.

§. 260. Erklärungen.

a) Ein Cylinder oder eine Walze (Fig. 304) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisflächen als Grundflächen und einer krummen Fläche, welche man Seitenfläche oder Mantel nennt, so begrenzt wird, daß jede Linie von der einen Kreislinie zur andern, welche mit der geraden Linie zwischen den beiden Mittelpuncten parallel auf der krummen Fläche gezogen wird, eine gerade Linie ist.

b) Die zwischen den beiden Mittelpuncten der Grundflächen gezogene gerade Linie heißt Axe (Fig. 305. 306 a b) und jeder Perpendikel von der einen Grundfläche zur andern die Höhe des Cylinders (Fig. 305. 306 c d).

c) Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Cylinder senkrecht oder gerade (Fig. 304. 305), im Gegentheile schief (Fig. 306).

d) Einen geraden Cylinder kann man dadurch entstanden denken, daß ein Rechteck um eine Seite als Axe gedreht wird.

§. 261. Zusätze.

1) Im senkrechten Cylinder ist die Axe der Höhe des Cylinders gleich, weil beide senkrecht auf den Grundflächen stehen. (Fig. 305, a b = c d.)

2) Alle mit den Grundflächen parallelen Durchschnitte des Cylinders sind Kreise, die den Grundflächen selbst gleich sind.

3) Wird eine Ebene durch die Axe des Cylinders gelegt, so ist diese Durchschnittsebene ein Parallelogramm; beim geraden Cylinder ist sie jedesmal ein Rechteck.

§. 262. Lehrsatz.

Der Cylinder kann als ein unendlicheckiges Prisma betrachtet werden.

Beweis: Fig. 305 ist ein Cylinder; jede seiner Grundflächen ist ein Kreis. Jeder Kreis kann aber als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden. Die krumme Seitenfläche des Cylinders bestünde demnach aus lauter sehr schmalen Parallelogrammen, von denen jedes die Höhe des Cylinders als eine Seite und als andere Seite eine der unendlich vielen Seiten der Grundfläche hätte. Folglich kann der Cylinder als ein unendlicheckiges Prisma betrachtet werden, und es gilt also auch vom Cylinder, was bereits vom Prisma erwiesen worden ist.

Zus. 1. Cylinder, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich (§. 255).

Zus. 2. Cylinder, welche gleiche Grundflächen haben, verhalten sich, wie ihre Höhen (§. 256).

Zus. 3. Cylinder, welche gleiche Höhen haben, verhalten sich, wie ihre Grundflächen (§. 256. Zus.).

Zus. 4. Bei einem Prisma ist $K = G \times H$ (§. 257). Da aber bei einem Cylinder die Grundfläche ein Kreis ist, so ist im Hinblick auf §. 217. Nr. 11 beim Cylinder $K = r^2 \times \pi \times H$, und $r = \sqrt{\frac{K}{\pi \times H}}$, und d (= Durchmesser) $= 2\sqrt{\frac{K}{\pi \times H}}$, und $H = \frac{K}{r^2 \times \pi}$. Oder, da $d = 2r$, so ist $K = \frac{d^2 \times \pi \times H}{4}$.

Zus. 5. Im Hinblick auf §. 217. Nr. 2 ist die krumme Seitenfläche des Cylinders oder der Cylindermantel $= 2r \times \pi \times H$, oder sie ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie der Grundfläche des Cylinders zur Grundlinie und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

Zus. 6. Die ganze Oberfläche des Cylinders ist demnach $2r \times \pi \times H + 2r^2\pi = 2r \times \pi \times (H + r)$.

Uebungsaufgaben.

374) Wie viel Kubikfuß hat ein Cylinder, dessen Durchmesser 5′ und dessen Höhe 15′ beträgt?

375) Eine runde Säule hat 3′ 5″ Durchmesser und ist 20′ 6″ hoch; wie groß ist der Kubikinhalt?

376) Die Welle an einem Wasserrad ist $20\frac{1}{2}$′ lang und hat einen Durchmesser von $3\frac{1}{4}$′; welchen Kubikinhalt hat sie und wie viel bayr. Klafter Holz würde sie geben?

377) Ein steinernes Bassin von kreisrunder Gestalt hat im Lichten $5\frac{1}{4}$′ als Durchmesser und eine Tiefe von $2\frac{3}{4}$′; wie viel bayr. Eimer Wasser sind in demselben, wenn es ganz voll ist?

378) Ein cylinderförmiges Gefäß soll 6 Kubikfuß enthalten, der Durchmesser im Lichten aber $2\frac{1}{2}$′ haben; wie hoch muß das Gefäß gemacht werden?

379) Wie viel wiegt ein Mühlstein (Sandstein), der 4′ im Durchmesser und $1\frac{1}{4}$′ zur Höhe hat? (1 Kubikfuß Sandstein wiegt 111 Pfund.)

380) Ein Cylinder hat einen Durchmesser von $2\frac{1}{2}$′ und eine Höhe von 6′; nun soll ein Cylinder von gleicher Höhe und doppelt so großem Inhalt gefertigt werden; wie groß muß der Durchmesser werden?

381) Wie groß ist der Cylindermantel von einem Cylinder, der 10′ zur Höhe und $2\frac{1}{2}$′ zum Durchmesser hat?

382) Wie viel □′ Blech braucht man zu einem hohlen Blechcylinder, welcher $8\frac{3}{4}$′ lang werden soll und dessen Durchmesser $3\frac{1}{2}$″ betragen muß?

383) Wenn ein bayr. Maßglas 4″ im Durchmesser hat, wie groß muß seine Höhe sein?

384) Wenn ein österreich. Seidelglas $3\frac{1}{2}$″ im Durchmesser hat, wie groß muß seine Höhe sein?

D) Von der Pyramide.

§. 263. Erklärung.

a) Eine Pyramide ist ein Körper, welcher von einer geradlinigen Figur als Grundfläche und von in einen Punct zusammenstoßenden Dreiecken als Seitenflächen begrenzt ist (Fig. 307. 308).

b) Der Punct, in welchen die Dreiecke zusammenstoßen, heißt die Spitze der Pyramide (§. 308) e).

c) Der Perpendikel, welcher von der Spitze auf die Grundfläche gezogen wird, heißt Höhe (Fig. 308. 309 e f); die Linien a e, d e u. s. w. heißen Kanten oder Seiten.

d) Eine Pyramide heißt regelmäßig, wenn ihre Grundfläche eine regelmäßige Figur und ihre Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind.

e) Ist die Grundfläche ein Dreieck, ein Viereck u. s. w., so heißt die Pyramide dreieckig, viereckig u. s. w.

f) Sind die einschließenden Flächen einer Pyramide vier gleichseitige Dreiecke, so heißt die Pyramide ein Tetraëder (Fig. 288) (s. §. 248).

Anmerk. Das Oktaëder, das Ikosaëder und das Dodekaëder können als Zusammensetzungen von Pyramiden betrachtet werden. Der erste Körper ist von 8, der zweite von 20 gleichseitigen congruenten △ und der dritte von 12 regulären congruenten Fünfecken begrenzt. Von dem Mittelpuncte aus im Innern der Körper lassen sich diese in lauter gleiche Pyramiden theilen, deren Spitze eben dieser Mittelpunct ist und deren Grundflächen die begrenzenden △ oder Fünfecke sind.

§. 264. Zusatz.

Ist die Pyramide regelmäßig, so trifft die Höhe den Mittelpunct der regelmäßigen Grundfläche.

Beweis: In Fig. 310 ist △ h c a ≌ △ h c e; denn

$$\begin{array}{c} ha = he \text{ (Bed.)} \\ hc = hc \\ \hline \triangle hca \cong \triangle hce \text{ (§. 52)} \\ \hline ac = ec \text{ (§. 50. Zus. 3).} \end{array}$$

Da die Congruenz der übrigen △ h c g, h c d u. s. w. in derselben Weise bewiesen werden kann, so ist c der Mittelpunct der Grundfläche (§. 87).

§. 265. Lehrsatz.

Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene schneidet, welche parallel zur Grundfläche ist, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche ähnlich. Beide Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer senkrechten Abstände von der Spitze.

Beweis: 1) Da in Fig. 311 die Ebene b c d e || der Ebene B C D E ist, so müssen natürlich auch die Grenzen derselben, die Linien, parallel laufen, weil sie in derselben Ebene liegen; also ist b c || B C; c d || C D u. s. w., und die ∟ der beiden Ebenen müssen deshalb auch einander gleich sein; also ∟ c d e = ∟ C D E u. s. w. Weil nun die angegebenen Linien parallel laufen, so stehen nach §. 156 die Seiten in Proportion, nämlich

$$\begin{array}{c} eb : EB = ab : AB \\ bc : BC = ab : AB \\ \hline eb : EB = bc : BC. \end{array}$$

Die übrigen Seiten stehen ebenfalls in Proportion, was auf dieselbe Weise nachgewiesen werden kann, und da auch die ∠ der beiden Ebenen gleich sind, so ist $bcde \sim BCDE$.

2) Wird durch die Höhe AF und die Kante AB eine Ebene gelegt, so verhält sich

$$ab : AB = af : AF$$

$$\text{da aber } eb : EB = ab : AB$$

$$\text{so verhält sich auch } eb : EB = af : AF$$

$$\text{und } eb^2 : EB^2 = af^2 : AF^2$$

$$\text{Da aber auch } bcde : BCDE = eb^2 : EB^2 \ (\S.\ 171)$$

$$\text{so verhält sich auch } bcde : BCDE = af^2 : AF^2.$$

Zus. Aus dem Abstande der beiden parallelen Flächen läßt sich der Abstand der Spitze von der Durchschnittsfläche durch Rechnung finden. Bedeutet nämlich G die Grundfläche der ganzen Pyramide (nämlich $BCDE$) und g die obere Durchschnittsfläche (nämlich $bcde$), h den senkrechten Abstand der beiden Flächen (nämlich die L. fF) und x den Abstand der Durchschnittsfläche von der Spitze (nämlich die L. af), so verhält sich $G : g = (h + x)^2 : x^2$ und also auch $\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + x) : x$; ferner $(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = (h + x - x) : x$ d. h. $(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = h : x$ und es ist also $x = \frac{h \times \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \frac{h \times (g + \sqrt{G})}{G - g}$.

§. 266. Erklärung.

Wird eine Pyramide (Fig. 311) von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten, so wird der zwischen der Grundfläche und der parallelen Ebene befindliche Theil der Pyramide eine abgekürzte Pyramide (Pyramidenstuß) genannt (Fig. 311 $bcdeBCDE$ oder Fig. 312).

§. 267. Lehrsatz.

Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

Beweis: Sind in den beiden Pyramiden (Fig. 313) die Grundflächen und Höhen gleich und bezeichnet d die Durchschnittsfläche der ersten und D die der zweiten Pyramide, g die Grundfläche der ersten und G die der zweiten, a den gleichen Abstand der Durchschnittsfläche von der Spitze und h die Höhe der einen und der andern Pyramide, so verhält sich nach §. 265

$$d : g = a^2 : h^2$$

$$\underline{\text{und } D : G = a^2 : h^2}$$

$$d : g = D : G.$$

Da aber nach der Voraussetzung $g = G$, so muß auch $d = D$ sein. Wenn nun in beliebigen gleichen Abständen von der Spitze der beiden Py-

ramiden jedesmal die Durchschnittsflächen gleich sind, so müssen nothwendig die Pyramiden selbst gleich sein.

§. 268. Lehrsatz.

Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma, das mit jener gleich große Grundfläche und Höhe hat.

Beweis: Wird das Prisma (Fig. 314) durch die Ebenen a e f und a e c in die drei Pyramiden d e f a, dann a b c e und e f c a zertheilt, so ist Pyramide d e f a = der Pyramide a b c e (§. 267). Ferner ist $\triangle$ e b c $\cong$ $\triangle$ e f c (§. 70. Zus. 2); wird nun $\triangle$ e b c als die Grundfläche der Pyramide a b c e und $\triangle$ e f c als die Grundfläche der Pyramide e f c a angenommen, so haben beide Pyramiden in a ihre gemeinschaftliche Spitze und somit gleiche Höhe und daher ist auch Pyramide a b c e = der Pyramide e f c a (§. 267). Also ist d e f a = a b c e = e f c a. Diese drei Pyramiden machen aber das Prisma aus, und da sie einander gleich sind, so ist jede Pyramide = $\frac{1}{3}$ des Prisma; folglich ist auch d e f a = $\frac{1}{3}$ a b c f e d.

Zus. 1. Da man jede geradlinige Figur, die mehr als 3 Seiten hat, durch Diagonallinien in $\triangle$ zertheilen kann, so gilt dieser Lehrsatz für jede Pyramide mit beliebiger Grundfläche und heißt also allgemein: Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, das mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Zus. 2. Da ein Cylinder als ein unendlicheckiges Prisma betrachtet werden kann (§. 262), so ist auch jede Pyramide der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Zus. 3. Auch verhalten sich Pyramiden von gleicher Grundfläche, wie ihre Höhen, und Pyramiden von gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen. (§. 256.)

§. 269. Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt einer Pyramide ist $= \frac{G \times H}{3}$.

Beweis: Das Product der Grundfläche mit der Höhe gibt den körperlichen Inhalt eines Prisma (§. 257); da aber eine Pyramide $\frac{1}{3}$ von einem Prisma ist (§. 268), das mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so ist K auch nur $\frac{1}{3}$ von dem körperlichen Inhalte des Prisma; also ist $K = \frac{G \times H}{3} = \frac{1}{3} G \times H$.

Zus. Ist aber $K = \frac{G \times H}{3}$, so ist $G = \frac{3\,K}{H}$ und $H = \frac{3\,K}{G}$.

§. 270. Lehrsatz.

Man findet die Oberfläche einer Pyramide, wenn man sowohl den Inhalt der Grundfläche, als den der Seitendreiecke addirt.

Beweis: er folgt aus der Erklärung einer Pyramide (§. 263).

Zus. 1. Ist die Grundfläche eine regelmäßige Figur und die Pyramide steht senkrecht, so sind alle Seitenflächen einander gleich, und man braucht blos ein △ auszurechnen, mit der Anzahl der Seiten der Grundfläche zu multipliciren und die Grundfläche selbst zu addiren; oder, wenn der Umfang der Grundfläche $= U$, die Höhe eines △ $= H$ und die Entfernung einer Seite der Grundfläche vom Mittelpuncte derselben $= E$ ist, so beträgt die ganze Oberfläche der Pyramide

$$\frac{U \times H}{2} + \frac{U \times E}{2} = \tfrac{1}{2} U \times (H + E).$$

Zus. 2. Soll blos die Oberfläche ohne die Grundfläche, also der Mantel, gefunden werden und bedeutet H die Höhe eine der Seitenflächen (eines △), so ist $O = U \times \frac{H}{2}$, d. h. = einem △, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die halbe Höhe einer Seitenfläche zur Höhe hat; oder bezeichnet man eine Grundlinie des △ mit a und die Höhe der Seitenfläche mit h, so ist der Mantel von einem n Eck $= \frac{n \times a \times h}{2}$.

Zus. 3. Ist die Pyramide regelmäßig und blos die Höhe ($= H$) gegeben und es soll die Größe des Mantels angegeben werden, so muß man die Höhe einer der Seitenflächen ($= h$) erst durch Rechnung suchen. Wird (Fig. 315) die Höhe der Pyramide, nämlich $a\,c$, gezogen, so fällt sie auf den Mittelpunct der Grundfläche und steht also auf derselben senkrecht; wird ferner die Höhe einer Seitenfläche, nämlich $a\,b$ und dann noch die L. $b\,c$ gezogen, so bilden $a\,c\,b$ ein rechtwinkliges △, und bezeichnet man die Kathete $a\,c$ mit H, die andere $b\,c$ mit b und die Hypotenuse $a\,b$ mit h, so ist $h^2 = H^2 + b^2$ und also $h = \sqrt{(H^2 + b^2)}$. Von einem n Eck, in welchem a eine Seite der Grundfläche bedeutet, ist also der Mantel $= \frac{n \times a}{2} \times \sqrt{(H^2 + b^2)}$.

§. 271. Lehrsatz.

Man findet den Rauminhalt einer abgekürzten Pyramide, wenn man den Quadratinhalt der obern und untern Grundfläche berechnet, aus dem Product der beiden Grundflächen die Quadratwurzel zieht, zu derselben die beiden Grundflächen addirt und die Summe mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt, oder $K = \frac{h}{3} \times [G + g + \sqrt{(G \times g)}] = \tfrac{1}{3}[G + g + \sqrt{(G \times g)} \times h]$.

Beweis: In Fig. 311 ist AF die Höhe der ganzen Pyramide und af die Höhe des abgeschnittenen Stückes und also fF die Höhe der abgekürzten Pyramide, welche Höhe $= h$ sein soll. Ist nun die untere Grund-

fläche $= G$ und die obere $= g$, so ist K der ganzen Pyramide $= \frac{G \times AF}{3}$ (§. 269) und K der abgeschnittenen Pyramide $= \frac{g \times af}{3}$ und folglich der Rauminhalt der abgekürzten Pyramide $= \frac{G \times AF}{3} - \frac{g \times af}{3}$. Wenn aber $fF = h$, so ist $AF = af + h$ und $\frac{G \times AF}{3} = \frac{G \times h}{3} + \frac{G \times af}{3}$ und folglich der so eben angegebene Rauminhalt der Pyramide $= \left(\frac{G \times h}{3} + \frac{G \times af}{3}\right) - \frac{g \times af}{3} = \frac{G \times h}{3} + \frac{(G - g) \times af}{3}$.

Da aber nach §. 265. Zus. $af = \frac{h \times (g + \sqrt{G}}{G - g}$, so ist der Rauminhalt der abgekürzten Pyramide $= \frac{h}{3} [G + g + \sqrt{G \times g}) = \frac{1}{3} [G + g + \sqrt{(G \times g)} \times h]$.

Anmerk. Wenn die beiden Grundflächen hinsichtlich ihrer Größe nicht sehr viel von einander verschieden sind und die Höhe nicht sehr groß ist, so nimmt man von beiden Grundflächen die arithmetische Mitte und multiplicirt diese mit der Höhe; demnach ist $K = \frac{G + g}{2} \times H$. Man findet aber den Rauminhalt dadurch etwas zu groß und diese Formel ist also nur dann anzuwenden, wenn man mit einer annähernden Richtigkeit sich begnügt.

§. 272. Lehrsatz.

Die Oberfläche des Mantels einer regelmäßigen abgekürzten Pyramide ist = der halben Summe der Umfänge der Grundflächen multiplicirt mit der Höhe eines Seitentrapezes.

Beweis: Die Seitenflächen einer abgekürzten Pyramide sind Trapeze; folglich ist nach §. 211, wenn U den Umfang der untern und u den Umfang der obern Grundfläche und h die Höhe eines Trapezes bedeutet, der ganze Mantel $= \frac{U + u}{2} \times h$.

Uebungsaufgaben.

385) Bei einer dreiseitigen regulären Pyramide ist eine Seite der Grundfläche $= 10^0\ 8'$ und die Höhe der Pyramide $= 20^0\ 9'$; wie groß ist der kubische Inhalt und wie groß die ganze Oberfläche?

386) Bei einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck ist, ist die eine Seite der Grundfläche $= 124''$ und die andere Seite $= 62''$ und die Höhe der Pyramide $= 200''$; wie groß ist der körperliche Inhalt und wie groß der Mantel der Pyramide?

387) Die Grundfläche einer Pyramide ist 50 □″ und ihr Kubikinhalt $\frac{2}{3}$ Kubikzoll; wie groß ist ihre Höhe?

388) Eine Pyramide, welche 2000 □□″ Inhalt hat, ist 60″ hoch; wie groß ist ihre Grundfläche und wenn diese ein Quadrat ist, wie groß ist der Mantel der Pyramide?

389) Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen eine Seite $4\frac{1}{2}'$ lang ist; wie groß ist die ganze Oberfläche der Pyramide, wenn jede Seitenfläche $10\frac{3}{4}'$ lang (hoch) ist?

390) Wenn die untere Grundfläche einer geraden regelmäßigen abgekürzten Pyramide ein Sechseck bildet und 3 □° 45 □′ 101 □″, die obere Grundfläche aber 2 □° 40 □′ 10 □″ und die Höhe 3° ist; wie groß ist der körperliche Inhalt?

391) Die untere Grundfläche einer abgekürzten Pyramide ist 36 □′, die obere 13 □′, die senkrechte Höhe 9′; wie groß ist der Kubikinhalt?

392) Ein senkrechter Pyramidenstutz, dessen untere und obere Grundflächen regelmäßige Sechsecke sind, hat eine Höhe von 12′; wie groß ist sein Kubikinhalt und sein Mantel, wenn eine Seite der untern Grundfläche 15′ und der obern 6′ lang ist?

393) Ein Pyramidenstutz von 4 gleich großen Seitenflächen ist unten $8\frac{1}{2}'$ und oben 3′ breit und lang; die Höhe der Seitenflächen ist 24′; wie groß ist der Mantel?

E) Vom Kegel.

§. 273. Erklärung.

a) Ein Kegel ist ein Körper, der von einer Kreisebene und von einer krummen Fläche begrenzt ist, die mit der Peripherie zusammenfällt und in einem Punct außerhalb der Kreisebene so endet, daß jede g. L. von diesem Puncte nach der Peripherie ganz in der krummen Fläche liegt (Fig. 316).

b) Die Kreisebene heißt die Grundfläche, die krumme Fläche die Seitenfläche oder Mantel und der Punct außerhalb der Kreisebene (Fig. 316 b) die Spitze des Kegels.

c) Eine gerade Linie von der Spitze bis zum Centrum des Kreises heißt die Axe (Fig. 316. 317 b a), und ein Perpendikel von der Spitze bis auf die Grundfläche die Höhe des Kegels.

d) Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so heißt auch der Kegel senkrecht oder gerade (Fig. 316), im Gegentheile schief (Fig. 317). Bei einem schiefen Kegel muß oft die Grundfläche vergrößert werden, um die Höhe erhalten zu können (Fig. 317 b c = der Höhe).

e) Wird der Kegel von einer Ebene durchschnitten, welche parallel der Grundfläche läuft, so ist der Kegel zwischen der Grundfläche und der Durchschnittsfläche ein abgekürzter Kegel und seine Höhe ein Perpendikel zwischen seinen Grundflächen (Fig. 318); der abgeschnittene Theil heißt Ergänzungskegel.

§. 274. Lehrsatz.

Der Kegel kann als eine unendlicheckige Pyramide betrachtet werden.

Beweis: Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis; dieser kann aber als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden. Die krumme Seitenfläche des Cylinders bestünde demnach aus lauter sehr schmalen gleichschenkligen △, von denen jedes eine der unendlich vielen Seiten der Grundfläche zur Grundlinie und in der Spitze des Kegels auch seine Spitze hätte. Folglich kann der Kegel als eine unendlicheckige Pyramide betrachtet werden,

und es gilt also auch von ihm, was bereits von der Pyramide erwiesen worden ist.

Zus. 1. Wird ein Kegel von einer Ebene so durchschnitten, daß die Durchschnittsebene || der Grundfläche ist, so ist die Durchschnittsebene der Grundfläche ähnlich, d. h. sie ist ein Kreis. (§. 265.)

Zus. 2. Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich. (§. 267.)

Zus. 3. Kegel von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen und Kegel von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen (§. 268. Zus. 3).

Zus. 4. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. (§. 268. Zus. 2.)

Zus. 5. Bei einer Pyramide ist $K = \frac{G \times H}{3}$ (§. 269); da aber bei einem Kegel die Grundfläche ein Kreis ist, so ist im Hinblick auf §. 217. Nr. 11 bei dem Kegel $K = \frac{r^2 \times \pi \times H}{3}$ oder $= \frac{1}{3} r^2 \times \pi \times H$ und $r = \sqrt{\frac{3K}{\pi \times H}}$ und $H = \frac{3K}{r^2 \times H}$.

Zus. 6. Da man die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels als eine Zusammensetzung unendlich vieler △ von gleicher Höhe betrachten kann, so sind diese △ zusammengenommen = einem △, welches die Seite des Kegels zur Höhe und die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie hat; oder wenn S die Seite des Kegels bedeutet, so ist der Mantel $= (2r \times \pi) \times \frac{1}{2} S = r \times \pi \times S$; und wird dazu noch die Grundfläche addirt, so ist die ganze Oberfläche des Kegels $= r \times \pi \times S + r^2 \times \pi = r + \pi \times (r + S)$.

Zus. 7. Da beim Kegel statt der Seite (S) häufig die Höhe (H) gegeben ist, so muß man erst die Größe der Seite suchen; da aber die Seite, die Höhe und der Radius (r) ein rechtwinkliges △ bilden, von dem S die Hypotenuse ist, so ist also $S = \sqrt{(H^2 + r^2)}$.

Zus. 8. Der Rauminhalt des abgekürzten Kegels kann ebenso gefunden werden, wie der einer abgekürzten Pyramide (§. 271); da aber bei dem abgekürzten Kegel die beiden Grundflächen Kreise sind, so läßt sich obige Formel, wenn R den Radius des größern und r den des kleineren Kreises bedeutet, auf folgende Weise ausdrücken: $G = R^2 \times \pi$ und $g = r^2 \times \pi$; folglich ist $\sqrt{G \times g} = \sqrt{(R^2 \times \pi) \times (r^2 \times \pi)} = R + r \times \pi$ und also $K = \frac{h}{3} \times [(R^2 \times \pi) + (r^2 \times \pi) + (R + r \times \pi)] = \frac{\pi \times h}{3} \times (R^2 + r^2 + R \times r) = \frac{1}{3} \times (R^2 + r^2 + R \times r) \times h \times \pi$.

Anmerk. In ähnlicher Weise, wie bei der abgekürzten Pyramide kann man, wenn die beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels an Größe nicht

sehr verschieden sind, von den beiden Radien die arithmetische Mitte nehmen und den Kegel als einen Cylinder betrachten. Es ist nämlich dann

$$K = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \times \pi \times H.$$

Zus. 9. Der Mantel eines senkrechten abgekürzten Kegels bildet, wenn er nach einer Seitenlinie aufgeschnitten wird, eine Fläche, deren größerer Bogen die Peripherie von der unteren Grundfläche und deren kleinerer Bogen die Peripherie von der obern Grundfläche ist; die Höhe des Mantels wird durch die Entfernung der beiden Bogen, also durch eine Seitenlinie des Kegels bestimmt. Bedeutet nun S diese Seitenlinie, so ist der Mantel

$$= \frac{(2\,R \times \pi) + (2\,r \times \pi)}{2} \times S = (R+r) \times \pi \times S.$$

Uebungsaufgaben.

394) Ein Kegel von Eisen hat einen Halbmesser von 5″ und eine Höhe von $1\frac{1}{2}'$; welches ist sein kubischer Inhalt?

395) Ein Kegel hat einen Durchmesser von $2\frac{1}{2}'$ und eine Höhe von 8′; wie groß ist sein Kubikinhalt?

396) Ein Kegel von Eisen hat einen Halbmesser von 8″ und eine Höhe von $2\frac{1}{2}'$; wie schwer ist er, wenn ein bayr. Kubikfuß Eisen 321 Pfund wiegt?

397) Ein ganz zugespitzter blecherner Trichter hat oben 9″ Durchmesser und eine Höhe von 15″: wie viel Blech war dazu nöthig?

398) Wie groß ist der kubische Inhalt eines Baumstammes, der an der Spitze nicht abgesägt ist, wenn der unterste Durchmesser $2\frac{1}{2}'$ und die Höhe 75′ beträgt?

399) Ein Feuerlöschfaß hat oben im Lichten $3\frac{1}{2}'$, am Boden $4\frac{1}{2}'$ Durchmesser und eine Höhe von $4\frac{1}{2}'$; wie viel bayr. Maß enthält es?

400) Der unterste Umfang eines Baumstammes ist $6\frac{1}{2}'$ und der oberste 2′ und die Höhe 50′; wie viel Kubikfuß Inhalt hat er?

401) Eine hölzerne Butte hat die Gestalt eines abgekürzten Kegels; der obere Durchmesser ist $2\frac{1}{4}'$, der untere $1\frac{1}{4}'$; die senkrechte Höhe $3\frac{1}{2}'$; wie groß ist der Kubikinhalt und wie groß der Mantel?

402) Die untere Grundfläche eines abgekürzten Kegels hat im Durchmesser 2′ 3″, die obere 1′ 1″, die Höhe 3′; wie groß ist der abgekürzte Kegel?

403) Ein Bräubottig hat im Lichten oben einen Durchmesser von $5\frac{3}{4}'$ und unten von $8\frac{1}{2}'$ und ist $5\frac{1}{4}'$ hoch; wie viel bayr. Eimer gehen hinein?

F) Von der Kugel.

§. 275. Erklärung.

a) Eine **Kugel** ist ein Körper, dessen Oberfläche in allen ihren Theilen von einem Puncte innerhalb des Körpers gleichweit absteht. Dieser Punct heißt **Centrum** oder **Mittelpunct**, und jede gerade Linie, deren Endpuncte im Centrum und in der Oberfläche liegen, **Radius** oder **Halbmesser**. Alle Halbmesser und alle Durchmesser sind demnach gleich.

b) Eine gerade Linie zwischen je zwei Puncten der Oberfläche heißt **Sehne**, und die Sehne, welche durch das Centrum geht, **Durchmesser** oder **Axe**; die Endpuncte der Axe heißen **Pole**.

§. 276. Lehrsatz.

Jeder Durchschnitt einer Ebene mit der Kugelfläche ist ein Kreis.

Beweis: Ist c (Fig. 319) der Mittelpunct und c d ein Perpendikel auf der Durchschnittsebene, so sind c a und c b Radien und demnach gleich, und da c d senkrecht auf der Durchschnittsebene steht, so ist ∟ c d a = R und ∟ c d b = R; es ist nun

$$cd = cd$$
$$ca = cb$$
$$\triangle cda \cong \triangle cdb \text{ (§. 52).}$$

Folglich ist auch a d = b d, d. h. d steht eben so weit von a als von b ab, und da dieses von jeden andern zwei beliebigen Puncten der Grenzlinie der Durchschnittsfläche auf ähnliche Weise nachgewiesen werden kann, so steht also d von allen Puncten der Grenzlinie gleich weit ab, ist also der Mittelpunct der Durchschnittsfläche, und diese selbst ist ein Kreis.

Zus. 1. Geht die Ebene durch den Mittelpunct der Kugel, so ist dieser zugleich der Mittelpunct der Durchschnittsfläche. Diese theilt dann die Kugel in zwei Halbkugeln oder Hemisphären.

Zus. 2. Der Durchschnitt dieser Ebene (Zus. 1) mit der Kugeloberfläche heißt größter Kreis oder Hauptkreis, weil auf der Kugeloberfläche kein größerer zu beschreiben ist. Da aber durch den Mittelpunct der Kugel unzählige Ebenen gelegt werden können, so sind also auch unzählige größte Kreise auf der Kugel möglich. Jeder andere Kreis, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht, heißt Nebenkreis.

§. 277. Erklärung.

a) Jeder Kreis, der auf der Kugel durch eine Ebene gebildet wird, heißt Kugelschnitt und der abgeschnittene Theil Kugelsegment oder Kugelabschnitt; die krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes nennt man häufig Kugelhaube.

b) Sind zwei Kugelabschnitte parallel, so heißt das zwischen den beiden Kreisen befindliche Stück der Kugelfläche ein Gürtel, Kugelband oder eine Zone.

§. 278. Lehrsatz.

Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel sind.

Beweis: a b d c (Fig. 320) sei der senkrechte Durchschnitt eines Cylinders, der Durchmesser der Grundfläche sei a b, die Höhe des Cylinders h f = a h, und c h d sei der senkrechte Durchschnitt eines aus dem Cylinder weggenommenen Kegels, welcher mit dem Cylinder gleiche Grundfläche und Höhe hat. Nach §. 274. Zus. 4 ist dieser Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders und der noch übrig bleibende Theil des Cylinders $\frac{2}{3}$. Es sei ferner a f o b der senkrechte Durchschnitt einer Halbkugel, deren Durchmesser a b = dem Durchmesser des Cylinders (a b). Die Durchschnittsfläche a b d c durchschneidet

also den Cylinder a b d c, den Kegel c h d und die Halbkugel a f o b. Da f h senkrecht steht, so ist das $\triangle$ h f d ein rechtwinkliges. Werden Cylinder, Kegel und Halbkugel durch eine mit der Grundfläche (a b) parallel laufende Ebene (e g) durchschnitten, so ist i g der Radius des Cylinderdurchschnittes, i o des Kugelschnittes und i m des Kegelschnittes. Zieht man nun h o, so ist

$$ho^2 = io^2 + ih^2 \text{ (§. 140).}$$

Da aber h o = i g (weil h o = h b = i g) und i m = i h, so ist auch $ig^2 = io^2 + im^2$ und also der Kreis, dessen Durchmesser i g ist, = den beiden Kreisen, deren Durchmesser i o und i m sind (§. 172. Zus.); d. h. der Cylinderdurchschnitt ist dem Kegel- und dem Kugeldurchschnitte zusammen genommen gleich. Bedeutet nun a den Cylinderdurchschnitt, b den Kegel- und c den Kugeldurchschnitt, so ist also

$$a = b + c; \text{ folgl. } a - c = b$$

d. h. wenn die Kegelfläche abgezogen wird, so ist der Rest der Cylinderfläche, welcher $\frac{2}{3}$ des ganzen Cylinders beträgt, = dem Kugeldurchschnitte. Da dieses in jedem Abstande von der Grundfläche so ist und der übrig bleibende Theil des Cylinders mit der Halbkugel gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so ist die Halbkugel = dem Reste, = $\frac{2}{3}$ vom ganzen Cylinder. Die ganze Kugel ist demnach ebenfalls $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Grundfläche ein größter Kreis und dessen Höhe der Durchmesser der Kugel ist.

Zus. 1. Da beim Cylinder $K = r^2 \times \pi \times H$ (§. 262. Zus. 4), so ist der Inhalt der Kugel $= r^2 \times \pi \times H \times \frac{2}{3}$. Die Höhe des Cylinders ist hier aber $= 2r$, folglich ist beim Cylinder $K = r^2 \times \pi \times 2r = 2r^3 \times \pi$ und bei der Kugel ist $K = 2r^3 \times \pi \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} r^3 \times \pi$. Da aber $2r = d$ und $r = \frac{d}{2}$ und $r^2 = \frac{d^2}{4}$, so ist beim Cylinder $K = \frac{d^2}{4} \times \pi \times d = \frac{d^3 \times \pi}{4}$, und bei der Kugel ist demnach $K = \frac{d^3 \times \pi}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3} \times d^3 \times \pi}{4} = \frac{d^3 \times \pi}{6}$, d. h. man findet den Inhalt einer Kugel, wenn man die Kubikzahl des Durchmessers mit $\frac{\pi}{6}$ oder mit 0,5236 multiplicirt und es ist $d = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}$.

Zus. 2. Da ferner $d^3 = 8 \times r^3$, so ist bei der Kugel $K = \frac{8r^3 \times \pi}{6} = \frac{4}{3} r^3 \times \pi$, d. h. man findet den Inhalt der Kugel auch, wenn man die Kubikzahl des Halbmessers mit $\frac{4}{3}$ multiplicirt und das Ergebniß mit $3{,}_{14}$ nochmals multiplicirt. Auch ist dann $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$.

§. 279. Lehrsatz.

Die Kugel läßt sich als eine Pyramide betrachten, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und den Radius der Kugel zur Höhe hat.

Beweis; Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in unendlich viele Theile getheilt, so kann jeder dieser Theile als eine Ebene betrachtet werden. Denkt man sich ferner diese Ebenen als Grundflächen von Pyramiden, welche mit ihren Spitzen im Centrum zusammenstoßen, so ist die Kugel allen diesen Pyramiden zusammengenommen gleich, oder einer einzigen Pyramide gleich, welche die Oberfläche der Kugel als Grundfläche und den Radius zur Höhe hat.

Zus. 1. Bedeutet S die Oberfläche der Kugel, so ist bei der Kugel $K = \frac{S \times r}{3}$ (§. 269). Da aber nach (§. 278. Zus. 2) $K = \frac{4}{3} r^3 \times \pi$, so ist auch $\frac{S \times r}{3} = \frac{4}{3} r^3 \times \pi = \frac{4 r^3 \times \pi}{3}$ und deshalb ist $S = 4 r^2 \times \pi$, d. h. die Oberfläche der Kugel ist = dem vierfachen Quadrate des Halbmessers, multiplicirt mit $3_{,14}$. Ist $S = 4 r^2 \times \pi$, so ist $r = \sqrt{\frac{S}{4 \times \pi}}$.

Zus. 2. Ist nun die Kugeloberfläche $= 4 r^2 \times \pi = 2 r \times \pi \times 2 r$ und betrachtet man 2 r als die Höhe der Kugel (= H), so läßt sich dieser Ausdruck in folgenden verwandeln: $2 r \times \pi \times H$. Dieser Ausdruck ist aber nach §. 262. Zus. 5 der Ausdruck für den Cylindermantel, und demnach ist auch die Kugeloberfläche dem Mantel eines senkrechten Cylinders gleich, welcher den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Durchmesser zur Höhe hat.

Zus. 3. Wenn nun die Oberfläche der Kugel $= 4 r^2 \times \pi$ ist, so ist die Oberfläche der Halbkugel $= 2 r^2 \times \pi$, und da der Flächeninhalt des Hauptkreises der Kugel $= r^2 \times \pi$ ist, so folgt daraus, daß die Oberfläche der Halbkugel gerade noch einmal und die Oberfläche der ganzen Kugel also 4 mal so groß ist, als der Flächeninhalt eines Hauptkreises.

Uebungsaufgaben.

404) Eine Kugel hat $2\frac{1}{2}'$ im Durchmesser; welches ist nun ihr Umfang, ihre Oberfläche und ihr kubischer Inhalt?

405) Der Durchmesser der Erde ist im Durchschnitt 1720 Meilen; wie groß ist die Oberfläche und wie groß der kubische Inhalt?

406) Wie viel bayr. Maß Wasser gehen in eine Glaskugel, die 8″ im Durchmesser hat.

407) Wie groß ist die Oberfläche eines Thurmknopfes, der 12′ im Durchmesser hat?

408) Wie groß ist die Oberfläche eines Globus, dessen Durchmesser $1\frac{1}{2}'$ beträgt?

409) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser $8\frac{1}{2}''$ beträgt?

410) Der Halbmesser einer Kugel ist 3′ 5″; wie groß sind Inhalt und Oberfläche?

411) Der Umfang einer Kugel ist 3′ 5″; wie groß sind Inhalt und Oberfläche?

412) Eine Kugel von Sandstein hat $2\frac{1}{2}'$ Umfang; wie groß ist die Oberfläche und wie groß der Inhalt?

G) Berechnung der regelmäßigen Körper.

Anmerk. Die Berechnung der §. 248 aufgeführten regelmäßigen Körper bietet nach dem Vorausgegangenen keine Schwierigkeiten; doch soll sie hier noch kurz angegeben werden.

1) Den kubischen Inhalt des Tetraëders zu finden.

Aufl. Da das Tetraëder eine reguläre dreiseitige Pyramide ist, so ist $K = \frac{G \times H}{3}$ (§. 269).

Zus. Die Oberfläche besteht aus 4 gleichseitigen congruenten △; man berechne also den Flächeninhalt eines einzigen △ und nehme diese Größe viermal, so findet man die Oberfläche des Tetraëders.

2) Den kubischen Inhalt des Oktaëders zu finden.

Aufl. Da das Oktaëder aus Pyramiden besteht, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, so ist $K = \frac{G \times H}{3} \times 2$ (§. 269).

Zus. 1. Da die Grundfläche ein Quadrat ist, so braucht man blos eine Seite dieses Quadrats zu messen, mit sich selbst und dann mit $\frac{1}{3}$ der Höhe zu multipliciren und das ganze Product noch doppelt zu nehmen.

Zus. 2. Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen congruenten △; man berechne also den Flächeninhalt eines △ und nehme diese Größe achtmal.

3) Den kubischen Inhalt des Ikosaëders zu finden.

Aufl. Da das Ikosaëder ein regulärer Körper ist, den man aus 20 gleichen regulären dreiseitigen Pyramiden, deren Spitzen sich sämmtlich im Centrum vereinigen, zusammengesetzt denken kann, so ist $K = \frac{G \times H}{3}$ (§. 269). G besteht aber aus 20 gleichseitigen △; man rechne also den Flächeninhalt eines einzigen △ aus, nehme ihn 20 mal und multiplicire das Product mit $\frac{1}{3}$ der Höhe einer Pyramide $= \frac{1}{6}$ der Höhe des Ikosaëders.

Zus. Die Oberfläche findet man, wenn man den Flächeninhalt eines einzigen △ mit 20 multiplicirt.

4) Den kubischen Inhalt des Heraëders zu finden.

Aufl. Da das Heraëder nichts anderes, als ein Würfel ist, so verfahre nach §. 258. Zus. 3.

5) Den kubischen Inhalt des Dodekaëders zu finden.

Aufl. Da das Dodekaëder aus 12 gleichen regulären fünfseitigen Pyramiden besteht, deren Spitzen sich sämmtlich im Centrum vereinigen, so ist $K = \frac{G \times H}{3}$ (§. 269). G besteht aber aus 12 regulären congruenten Fünfecken: man rechne also den Flächeninhalt eines einzigen aus, nehme ihn 12 mal und multiplicire das Product mit $\frac{1}{3}$ der Höhe der Pyramide oder mit $\frac{1}{6}$ der Höhe des Dodekaëders.

Zus. Die Oberfläche findet man, wenn man den Flächeninhalt eines einzigen Fünfecks mit 12 multiplicirt.

H) Berechnung des Rauminhaltes mancher Körper aus dem absoluten und specifischen Gewichte derselben.

Das absolute Gewicht eines Körpers ist der Druck desselben auf irgend eine Unterlage; das specifische Gewicht aber ist die Größe des Druckes mit Rücksicht auf das Volumen oder den Rauminhalt eines Körpers. Die Art und Weise, wie man das specifische Gewicht der Körper finden kann, weiset die Naturlehre nach; hier kann nur so viel Platz finden, als zur Erklärung unumgänglich nothwendig ist.

Ein Kubikzoll Holz ist leichter, als ein Kubikzoll Blei; daraus geht hervor, daß verschiedene Körper in gleichem Raume eine ungleiche Anzahl von Theilchen enthalten. Denn man denkt sich bei dem schwereren Körper mehr solcher Theilchen, aber dichter neben einander liegend, als bei dem leichtern. Die Dichte der Körper bei gleichem Umfange oder Volumen hat man nun mit der des reinen Wassers verglichen, und die Zahl, welche ausdrückt, wie viel mal ein Kubikzoll eines Körpers mehr oder weniger wiegt, als ein Kubikzoll Wasser, gibt also die Dichte oder das specifische Gewicht dieses Körpers an. Man nimmt zu solchen Vergleichungen gewöhnlich destillirtes Wasser bei $+3{,}3^0$ **Réaumur**. Da aber das Gewicht sowohl, als der Kubikfuß in verschiedenen Staaten eine verschiedene Größe haben, so hat natürlich auch der Kubikfuß Wasser in diesen Staaten eine verschiedene Schwere. In nachstehender Tabelle ist nun die Schwere eines Kubikfuß destillirten Wassers in landesüblichen Pfunden und in französischen Grammen angegeben.

Tabelle I.

1 Kubikfuß Wasser wiegt in

Namen der Staaten	landesübliche Pfund	franz. Grammes *)
Baden	$54{,}_{0000}$	$27000{,}_{00}$
Bayern	$44{,}_{3948}$	$24861{,}_{09}$
Churhessen	$50{,}_{9031}$	$23813{,}_{06}$
Hannover	$53{,}_{2836}$	$24921{,}_{32}$
Oesterreich . . .	$56{,}_{4008}$	$31585{,}_{14}$
Preußen	$66{,}_{0000}$	$30915{,}_{84}$
Sachsen (Königr.)	$48{,}_{6224}$	$22710{,}_{86}$
Württemberg . . .	$50{,}_{2732}$	$23514{,}_{19}$

Bei Rechnungen, welche keine sehr große Genauigkeit erfordern, können die Decimalstellen weggelassen werden.

*) Der franz. Gramme ist die Schwere eines Kubik-Centimeters destillirten Wassers.

In der nachfolgenden Tabelle soll nun das specifische Gewicht einiger fester Körper angegeben werden; ausführlichere Tabellen sind in Lehrbüchern der Physik enthalten.

Tabelle II.
Destillirtes Wasser = 1.

Feste Körper	Specifisches Gewicht	Feste Körper	Specifisches Gewicht
Ahornholz (trocken)	$0{,}_{750}$	Kupfer (gehämmert)	$9{,}_{000}$
Alabaster	$2{,}_{700}$	Lindenholz	$0{,}_{604}$
Apfelbaumholz (trocken)	$0{,}_{793}$	Marmor (bayreuther)	$2{,}_{840}$
Birkenholz (frisch)	$0{,}_{702}$	„ (carrarischer)	$2{,}_{717}$
„ (trocken)	$0{,}_{580}$	„ (parischer)	$2{,}_{838}$
Birnbaumholz	$0{,}_{661}$	Messing	$8{,}_{940}$
Blei	$11{,}_{310}$	Platina (geschmolzen)	$20{,}_{855}$
Buchenholz	$0{,}_{852}$	„ (gehämmert)	$21{,}_{314}$
Eichenholz (vom Kern trocken)	$0{,}_{795}$	Quecksilber	$13{,}_{597}$
„ (vom Splint) ...	$0{,}_{610}$	Sandstein	$2{,}_{500}$
Eis	$0{,}_{950}$	Schiefer	$2{,}_{672}$
Eisen (geschmiedet)	$7{,}_{788}$	Schwefel (Stangen)	$1{,}_{990}$
„ (gegossen)	$7{,}_{251}$	Silber (gegossen)	$10{,}_{414}$
Erlenholz	$0{,}_{680}$	„ (gehämmert)	$10{,}_{622}$
Eschenholz	$0{,}_{845}$	Steinsalz	$2{,}_{412}$
Gold (gediegen)	$18{,}_{000}$	Tanne (weiß)	$0{,}_{550}$
„ (gehämmert)	$19{,}_{361}$	„ (roth)	$0{,}_{498}$
Gyps	$2{,}_{964}$	Zink (gegossen)	$7{,}_{213}$
Holzkohle	$0{,}_{440}$	„ (gehämmert)	$7{,}_{861}$
Kalkstein (dichter)	$2{,}_{720}$	Zinn (gegossen) ··········	$7{,}_{291}$
Kupfer (gegossen)	$8{,}_{788}$	„ (gehämmert)	$7{,}_{799}$

Es soll nun folgende Aufgabe berechnet werden: „Welchen Rauminhalt hat eine Kugel von Blei, welche 800 bayr. Pfund wiegt?" Nach der Tabelle **II** verhält sich das specifische Gewicht des Blei's zu Wasser wie $11{,}_{310} : 1$; ist nun in Bayern nach der Tabelle **I** ein Kubikfuß Wasser $= 44{,}_{3948}$ Pfund, so ist ein Kubikfuß Blei $11{,}_{310} \times 44{,}_{3948} = 502{,}_{105188}$ bayr. Pfund schwer. Folglich ist die Kugel von 800 bayr. Pfund so viel mal 1 Kubikfuß als $502{,}_{105188}$ Pfund in 800 bayr. Pfund enthalten sind, also $= \frac{800}{502{,}_{105188}}$ $= 1{,}_{59}\ldots$ bayr. Pfund.

Wenn man den bayr. Kubikfuß Wasser zu 44 Pfund annimmt, so ist die Rechnung kürzer; aber das Resultat ist nicht genau; denn es ist etwas

zu groß. Es ist nämlich $11,_{310} \times 44 = 497,_{64}$ und also die Kugel $= \frac{800}{497,_{64}}$ $= 1,_{60}$.. bayr. Kubikfuß.

Aus dieser Auseinandersetzung läßt sich nun folgende Regel ableiten: Man findet den Rauminhalt eines Körpers (in bayr. Kubikfuß), wenn man das absolute Gewicht desselben durch das 44fache specifische Gewicht dividirt, d. h. in dem angeführten Beispiele $\frac{800}{11,_{310} \times 44,_{3948}}$.

Da in Oesterreich ein Kubikfuß Wasser 56 Pfund wiegt, so muß also das specifische Gewicht mit 56 multiplicirt werden, wenn man österreichische Pfund erhalten will, und wenn die Bleikugel 800 österreich. Pfund schwer ist, so heißt also die Auflösung obiger Aufgabe: $\frac{800}{11,_{310} \times 56,_{4008}}$.

In ähnlicher Weise kann das Volumen eines hohlen Raumes berechnet werden, wenn der hohle Raum mit einer Flüssigkeit angefüllt wird, deren specifisches Gewicht man kennt. Soll z. B. berechnet werden, wie groß der hohle Raum eines großen eisernen Topfes ist, so braucht man ihn nur mit Wasser zu füllen und dieses Wasser dann zu wägen. Gesetzt, das Wasser sei 20 Pfund schwer, so schließt man also: 1 Kubikfuß Wasser ist 44 Pfund (bayr.) schwer; folglich sind 20 Pfund Wasser so viel mal 1 Kubikfuß, als 44 in 20 enthalten ist, nämlich $\frac{20}{44} = \frac{5}{11}$ Kubikfuß. Nach österreichischem Maße wäre der hohle Raum, wenn das Wasser 20 österreich. Pfund wiegen würde $= \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$ Kubikfuß.

Uebungsaufgaben.

413) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kanonenkugel, die 24 Pfund schwer ist?

414) Ein Block Lindenholz wiegt 5 Centner; wie groß ist sein Kubikinhalt?

415) Es soll eine eiserne Walze gegossen werden von $1\frac{1}{4}'$ Durchmesser; da sie 10 Centner schwer werden soll, so fragt sich, welche Länge sie bekommen müsse?

416) Wie viel Kubikfuß hält ein Kessel, wenn das Wasser, womit er angefüllt worden ist, 625 Pfund wiegt?

417) Ein eicherner Block wiegt $4\frac{3}{4}$ Centner; wie groß ist sein Kubikinhalt?

418) Eine Bildsäule von cararischem Marmor wiegt 350 Pfund; wie viel Kubikfuß Inhalt hat sie?

419) Eine gußeiserne Röhre wiegt 75 Pfund; wie groß ist ihr Kubikinhalt?

420) Wie groß ist der Kubikinhalt eines eisernen Hafens, wenn das Wasser, womit er angefüllt war, 25 Pfund wiegt?

Anhang.

A) Die Netze einiger geometrischer Körper.

Zum bessern Verstehen der Erklärungen, Lehrsätze und Aufgaben über Körperberechnung erscheint es nöthig, noch die Netze der wichtigsten geometrischen Körper anzugeben. Es ist für den Anfänger ganz besonders zu empfehlen, daß er diese Netze in vergrößertem Maße zeichne und die treffenden Körper wirklich sich verfertige. Dickes, steifes Papier oder dünner Pappendeckel (Preßspan) eignen sich recht gut dazu. Die fertigen Körper können dann mit weißem Papier überklebt werden.

1) Netz des Tetraëders (Fig. 321). Zeichne ein gleichseitiges △ a b c, halbire jede Seite und vereinige die Halbirungspuncte durch g. Ll.

2) Netz des Oktaëders (Fig. 322). Zeichne ein gleichseitiges △ a b c und theile es wie Fig. 321, verlängere c b nach f und mache b f = c d; zeichne über d f ein gleichseitiges △ d f e und theile es ebenfalls wie Fig. 321.

3) Netz des Ikosaëders (Fig. 323). Ziehe die L. a b, theile sie in 5 gleiche Theile und zeichne auf die beiden Seiten über jeden einzelnen Theil gleichseitige △; ziehe c d und zeichne nach Anleitung der Fig. 313 die noch fehlenden △.

4) Netz des Hexaëders (Fig. 324). Zeichne sechs Quadrate aneinander nach der Figur.

5) Netz des Dodekaëders (Fig. 325). Zeichne ein reguläres Fünfeck a b c d e und ziehe in demselben die Diagonalen a c, a d u. s. w., vereinige dann die dadurch entstehenden Durchschnittspuncte, wodurch ein kleineres Fünfeck g h i k m gebildet wird; ziehe nun in diesem kleineren Fünfeck die Diagonalen und verlängere sie bis an die Seiten des größeren Fünfecks. Dadurch entstehen 5 Fünfecke, welche auf den fünf Seiten des kleineren Fünfecks sich befinden. In ähnlicher Weise wird dieses Verfahren wiederholt und neue Fünfecke gezeichnet, von denen das eine an der Seite d f anliegt.

6) Netz des Körpers des Archimedes (Fig. 326). Zeichne nach der Figur 18 Quadrate und auf 4 derselben 8 gleichseitige △.

7) Netz eines dreiseitigen Prisma (Fig. 327). Zeichne drei beliebig lange, einander gleiche rechtwinklige Parallelogramme und auf das mittelste derselben 2 gleichseitige △.

8) Netz eines fünfseitigen Prisma (Fig. 328). Zeichne 5 einander congruente rechtwinklige Parallelogramme (Rechtecke) und auf eines derselben 2 reguläre Fünfecke.

9) Netz eines schiefen Prisma (Fig. 329). Zeichne ein Rechteck b d o n und an dasselbe noch 2 gleich große Rechtecke, so daß i k = k l = l m; ziehe die L. b a beliebig schief und f d || b a; verlängere n b nach h und o b nach g und ziehe a h und f g. Zeichne nun die beiden △ und zwar b c = d e = b n und a c = f e = a b.

10) Netz eines Parallelepipedums (Fig. 330). Zeichne vier beliebig große, aber congruente Rechtecke und auf eines derselben zwei gleich große Quadrate, wie die Figur zeigt.

11) Netz einer Walze (Fig. 331). Zeichne einen Kreis x, theile den Durchmesser in 7 gleiche Theile und mache a b = 22 solcher Theile; setze an a einen beliebig langen Perpendikel a c und vollende nun das Rechteck a b d c. An die L. c d zeichne noch einen Kreis = dem Kreise x.

12) Netz einer dreiseitigen senkrechten Pyramide (Fig. 332). Zeichne ein gleichseitiges △ a b c und auf a b ein beliebig hohes gleichschenkliges △ a b d und an die beiden gleichen Seiten noch die beiden △ e a d und f b d, von denen jedes ≌ a b d ist.

Zus. In derselben Weise können mehrseitige Prismen gezeichnet werden, wenn statt des △ irgend eine beliebige regelmäßige Figur gezeichnet wird, und so viele gleichschenklige △ an einander gereiht werden, als die Grundfläche Seiten hat.

13) Netz einer ungleichseitigen Pyramide (Fig. 333). Zeichne ein ungleichseitiges △ a b c und auf a b das gleichschenklige △ a b f, mache f d = f e = f a und a d = a c und b e = b c.

14) Netz einer schiefen Pyramide (Fig. 334). Zeichne ein gleichseitiges △ a b c und auf a b ein beliebiges, schiefwinkliges △, mache dann f d = f b und a d = a b; ferner f e = f b und b e = a b.

15) Netz einer abgekürzten dreiseitigen Pyramide (Fig. 335). Zeichne wie Fig. 332 ein Netz zu einer dreiseitigen Pyramide, setze den Zirkel in f und ziehe den Bogen g h, ziehe die drei Sehnen und auf der mittlern Sehne errichte das gleichseitige △ i.

16) Netz eines senkrechten Kegels (Fig. 336). Ziehe einen Kreis, theile den Durchmesser in 7 gleiche Theile, ziehe dann von einem beliebigen Puncte a aus den Bogen d e und mache ihn = 22 solcher Theile des Durchmessers.

17) Netz eines abgekürzten Kegels (Fig. 337). Verfahre im Ganzen nach Fig. 336; ziehe dann den Bogen f g, theile ihn oder auch den

Bogen d e in 3 gleiche Theile; die Sehne h i ist dann = dem Durchmesser des kleinen Kreises.

18) Netz einer Kugel (Fig. 338). Ziehe a b = dem Durchmesser der zu fertigenden Kugel, theile a b in 7 gleiche Theile, mache c d = 22 solcher Theile, ziehe ferner eine L. g h, mache e f = c d, theile e f in 12 gleiche Theile und trage von e nach g und von f nach h jedesmal 9 solcher Theile; nimm nun 10 dergleichen Theile in den Zirkel und ziehe von 1 den Bogen i k, von 2 den Bogen n m u. s. f. bis 12; in ähnlicher Weise ziehe dann, von g beginnend, die entgegengesetzten Bögen, welche die ersteren durchschneiden. Die von den Bögen eingeschlossenen Theile geben in ihrer Vereinigung die Kugel.

19) Netz eines Rauten-Sechsflach's (Fig. 339). Ziehe eine g. L. a b und aus einem Puncte derselben einen Halbkreis (a c d), theile ihn in drei gleiche Theile und zeichne dann sechs Rauten, deren Seiten = dem Radius, in der Ordnung, wie die Figur zeigt.

20) Netz eines Rauten-Zwölfflach's (Fig. 340). Es besteht aus 12 Rauten, deren Diagonale jedoch in einem bestimmten Verhältnisse stehen müssen. Am sichersten bekommst Du eine solche Raute, wenn Du zuerst ein Quadrat (Fig. 341 a b c d) construirst, die beiden Diagonalen ziehst, eine Seite des Quadrates, etwa d c in e halbirst und o f = o g = d e machst; a g c f ist dann die Raute, welche zwölfmal in der Ordnung gezeichnet wird, wie die Figur 340 zeigt.

21) Netz des Vierundzwanzigflach's oder des Leuzit (Fig. 342). Es besteht aus 24 Vierecken von bestimmter Form. Wenn Du die nach Fig. 341 construirte Raute anwendest, so erhältst Du auf folgende Art eines der 24 Vierecke: ist a b c d (Fig. 343) eine solche Raute, so halbire d c durch eine diese Linie in g durchschneidende Senkrechte, halbire ferner a i in h, mache g e = g f = a h, halbire noch d g in m und ziehe m f, f c, c e, e m so ist f c e m das gesuchte Viereck. Setze nun 24 solcher Vierecke nach der Fig. 342 aneinander.

B) Construction noch einiger krummer Linien.

1) Die Figur a b c (Fig. 344) stellt einen Kegel dar. Dieser kann nach mehreren Richtungen geschnitten werden und die Schnittfläche ist dann von verschiedenen krummen Linien begrenzt. Wird der Kegel von einer Ebene parallel mit der Grundfläche in der Richtung d e geschnitten, so entsteht ein Kreis (§. 274. Zus. 1); wird er, ohne die Grundfläche zu berühren, in schiefer Richtung, etwa in der Richtung f g, geschnitten, so heißt die begrenzende krumme Linie eine Ellipse (§. 120); läuft der Schnitt parallel mit der Seitenlinie a c in der Richtung h i, so heißt die krumme Grenzlinie k i m eine Parabel, und geht der Schnitt endlich parallel mit der Axe c n in

der Richtung p o, so wird die krumme Grenzlinie q p r eine **Hyperbel** genannt.

2) Die Linie a c b (Fig. 345) ist eine Parabel und zwar eine solche Linie, in welcher jeder Punct derselben von dem Puncte d eben so weit entfernt ist, als von der Linie e f; denn g d = g h; i d = i k; a d = a m. Folgende Hilfslinien oder Puncte haben besondere Namen: e f heißt die Leitlinie; p der Leitpunct; d der Brennpunct; c o die Axe; c der Scheitelpunct; g q der Parameter; g d (= d q = d p) der halbe Parameter; c d, c n, c o die Abscissen; g d (= q d), i n (= r n), a o (= b o) die Ordinaten; d i, d a die Leitstrahlen.

3) Da g d (Fig. 345) der halbe Parameter und = d p ist, so ist d c (= c p) der vierte Theil des Parameters; deshalb läßt sich, wenn der Parameter einer Parabel bekannt ist, auf folgende Weise leicht eine Parabel construiren: ist g q (Fig. 346) der Parameter, so ziehe eine willkürliche Linie e f (Fig. 347) als Leitlinie und durch einen beliebigen Punct p als Leitpunct eine Linie p o, welche e f senkrecht durchschneidet, trage $\frac{1}{4}$ des Parameters von p nach c und von c nach d, so ist c der Scheitelpunct und d der Brennpunct der zu ziehenden Parabel. Nimm nun auf der Linie c o die beliebigen Puncte k, m, n, o an, ziehe durch sie Linien, welche mit der Leitlinie e f parallel laufen und trage die Entfernung k p von d nach g und h, dann die Linie m p von d nach i und w, ferner n p von d nach q und r, und endlich o p von d nach a und b. Vereinige nun die Puncte a, q, i, g, c, h, w, r, b durch eine krumme Linie, so ist diese die verlangte Parabel.

4) Wenn in einer Parabel zwei parallele Sehnen (Fig. 348 a b || s z) halbirt werden und durch die Halbirungspuncte e und f eine g. L. g h gezogen wird, so läuft diese parallel mit der Axe c o. Die Axe durchschneidet jede mit dem Parameter parallel laufende Linie i k oder x w in der Mitte. Darauf stützt sich die Auflösung folgender Aufgabe: **Die Axe einer gegebenen Parabel zu bestimmen.** Ziehe nämlich zwei beliebige parallele Sehnen (Fig. 348 a b und s z), halbire sie in e und f, ziehe durch diese Halbirungspuncte eine g. L. (g h) und durchschneide diese Linie an irgend einem beliebigen Puncte durch eine andere g. L. senkrecht (entweder durch p y, durch i k oder durch x w). Errichte dann aus dem Halbirungspuncte einer der zuletzt gezogenen Linien einen Perpendikel, so ist dieser, gehörig verlängert, die Axe.

5) Wenn von einer der mit dem Parameter oder der Leitlinie parallel laufenden Linien, etwa von p y (Fig. 348) und zwar von dem Puncte p eine g. L. zum Scheitel c gezogen, auf diese Linie an den Punct p ein Perpendikel errichtet und so verlängert wird, daß er die Axe trifft (p q), so ist der Theil der Axe, welcher zwischen dem Berührungspuncte q und der Linie p y liegt, also die Linie q r = dem Parameter. Auf diesen und den vorher-

gegangenen Satz stützt sich die Auflösung der folgenden Aufgabe: den Brennpunct einer Parabel zu bestimmen. Ist nämlich die Parabel x c w (Fig. 348) gegeben, so suche zuerst die Axe und dann ziehe von einem beliebigen Puncte der Parabel, etwa von p, eine senkrechte Linie p r auf die Axe, ziehe ferner p c, und errichte aus dem Puncte p einen Perpendikel, welcher die Axe in q schneidet, theile dann q r in 4 gleiche Theile und trage von c nach d einen dieser Theile, so ist d der Brennpunct.

6) Wenn eine Hyperbel gezeichnet werden soll, so ziehe eine g. L. a b (Fig. 349), welche die Axe heißt und bestimme auf derselben zwei Puncte c und d, so daß a c = b d. Diese beiden Puncte heißen die Brennpuncte. Nimm ferner auf der verlängerten Axe beliebige Puncte 1. 2. 3. 4. u. s. w. an. Ziehe nun mit b 1 als Halbmesser aus den Brennpuncten Bögen und mit a 1 aus den Brennpuncten neue Bögen, welche die ersten Bögen in e, f, g, h durchschneiden. Hierauf ziehe von den Brennpuncten mit b 2 wieder Bögen und mit a 2 neue Bögen, welche jene in i, k, m, n durchschneiden. Auf gleiche Weise fahre fort. Die Durchschnittspuncte der Bögen vereinige endlich durch eine krumme Linie, so ist diese die Hyperbel.

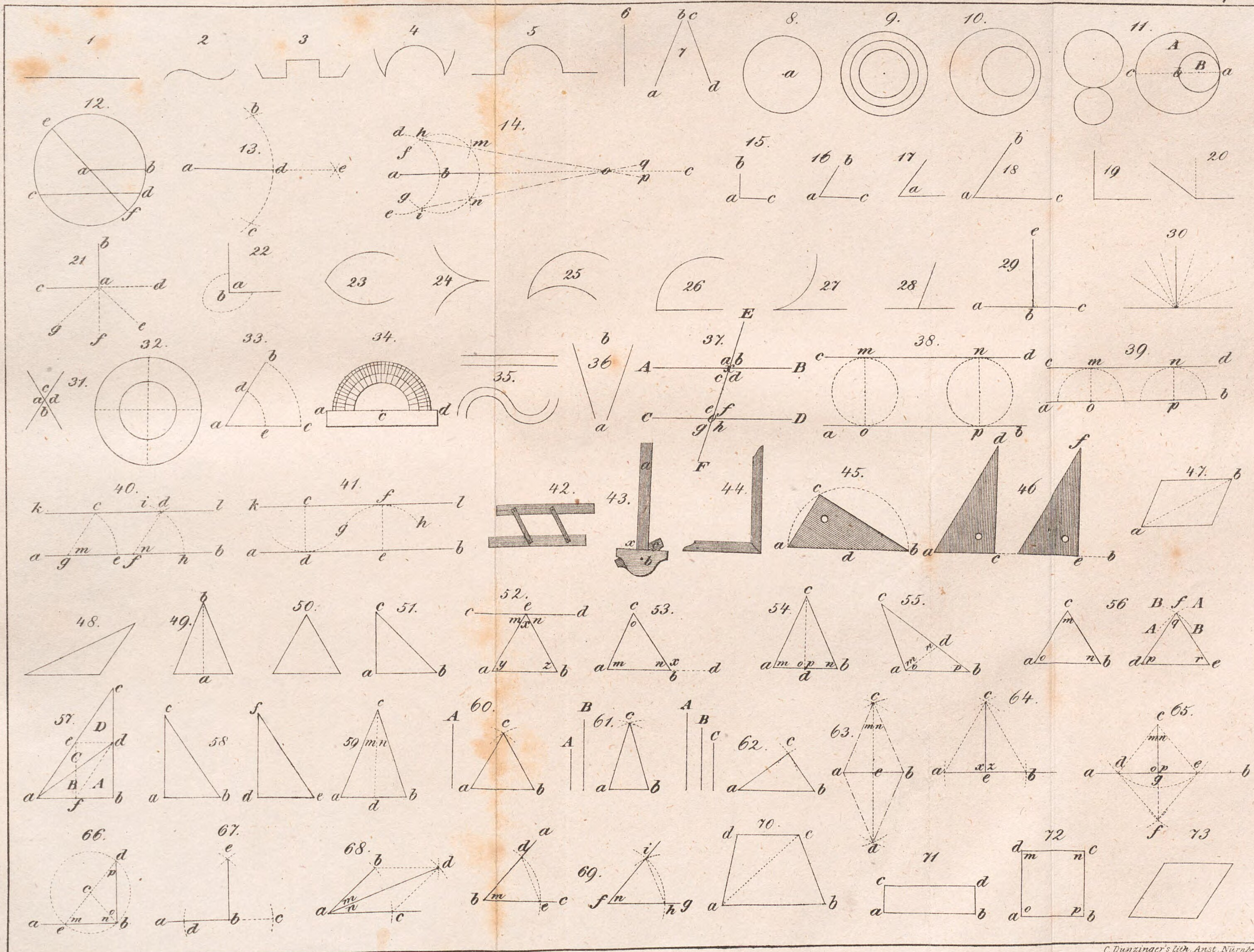
7) Gedrückte Bogenlinien können auch auf folgende Arten gezogen werden:

a) ziehe eine g. L. a b (Fig. 350) und auf derselben zwei beliebige Halbkreise, setze den Zirkel in c und d und mache mit c d Kreuzbögen in e, ziehe e c f und e d g und endlich von e aus mit e f als Halbmesser den Bogen f g;

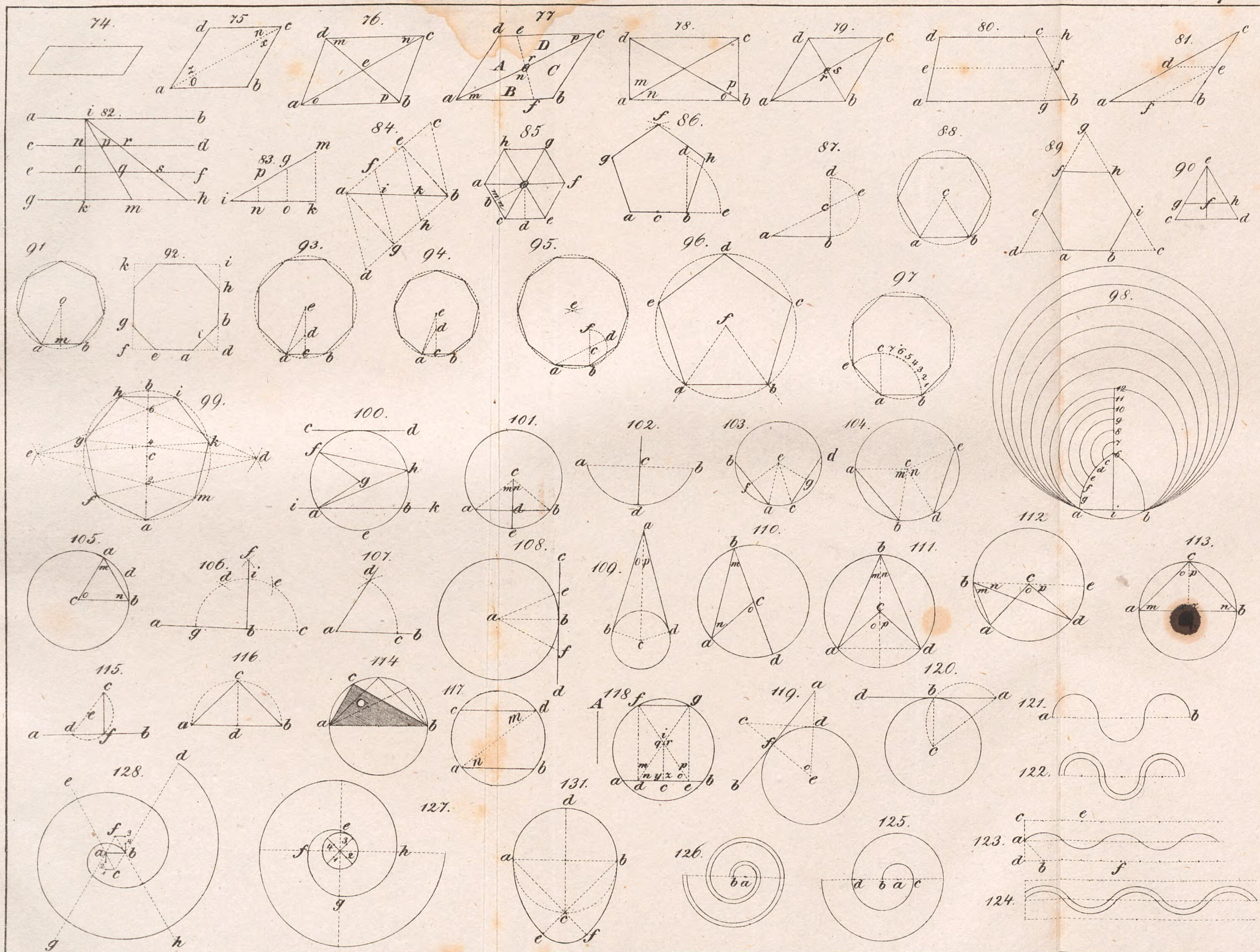
b) ziehe eine g. L. a b (Fig. 351) und beliebige Bögen, die sich in f und g durchschneiden und von f und g aus mit f g als Halbmesser Kreuzbögen in e und von e aus den Bogen f g;

c) ist a b die Länge und i d die Höhe des Bogens (Fig. 352) gegeben, so setze die als Perpendikel in den Halbirungspunct i der Länge a b; ziehe von i als Centrum mit i a den Bogen a c, welcher die verlängerte Linie i d in c schneidet; theile c d in 3 gleiche Theile, trage einen solchen Theil von d nach e und bilde mit dem noch übrigen Theil der Höhe, nämlich mit e i Kreuzbögen, die sich in f und g durchschneiden: nun ziehe von f und g aus mit f g Kreuzbögen in h und von h aus den Bogen f g.

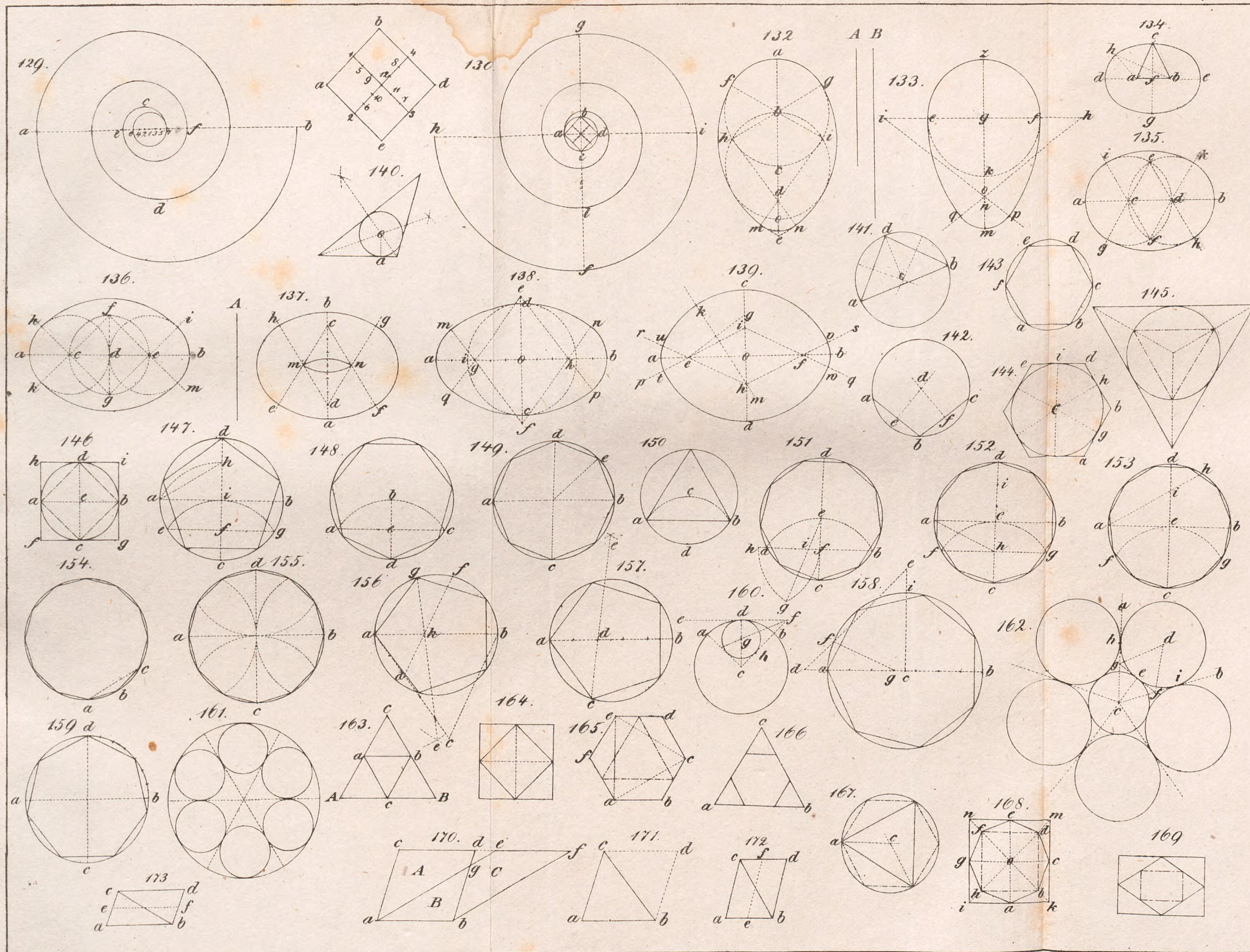
Druck von Fr. Campe & Sohn.



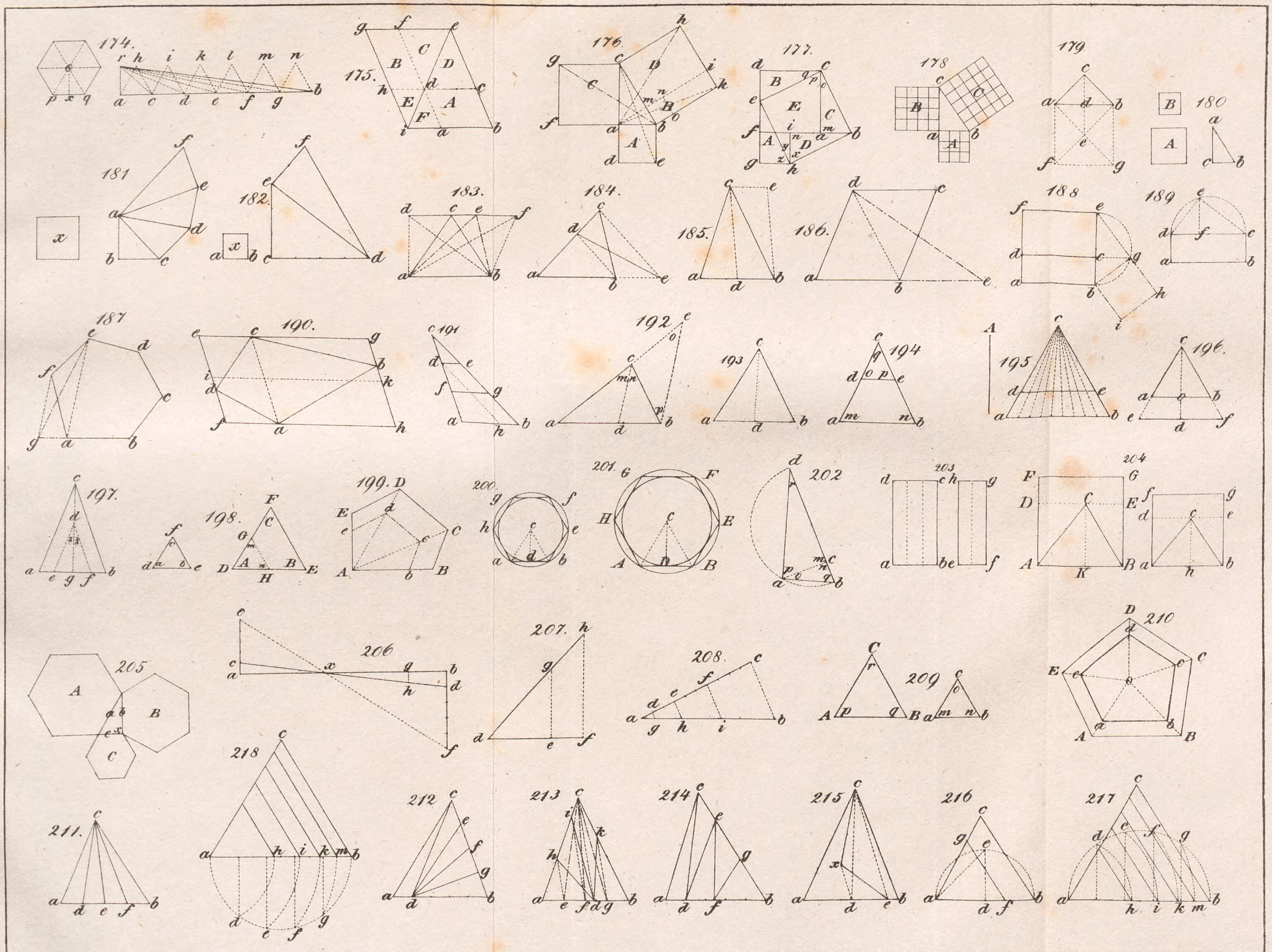
C. Dunzinger's lith. Anst. Nürnberg



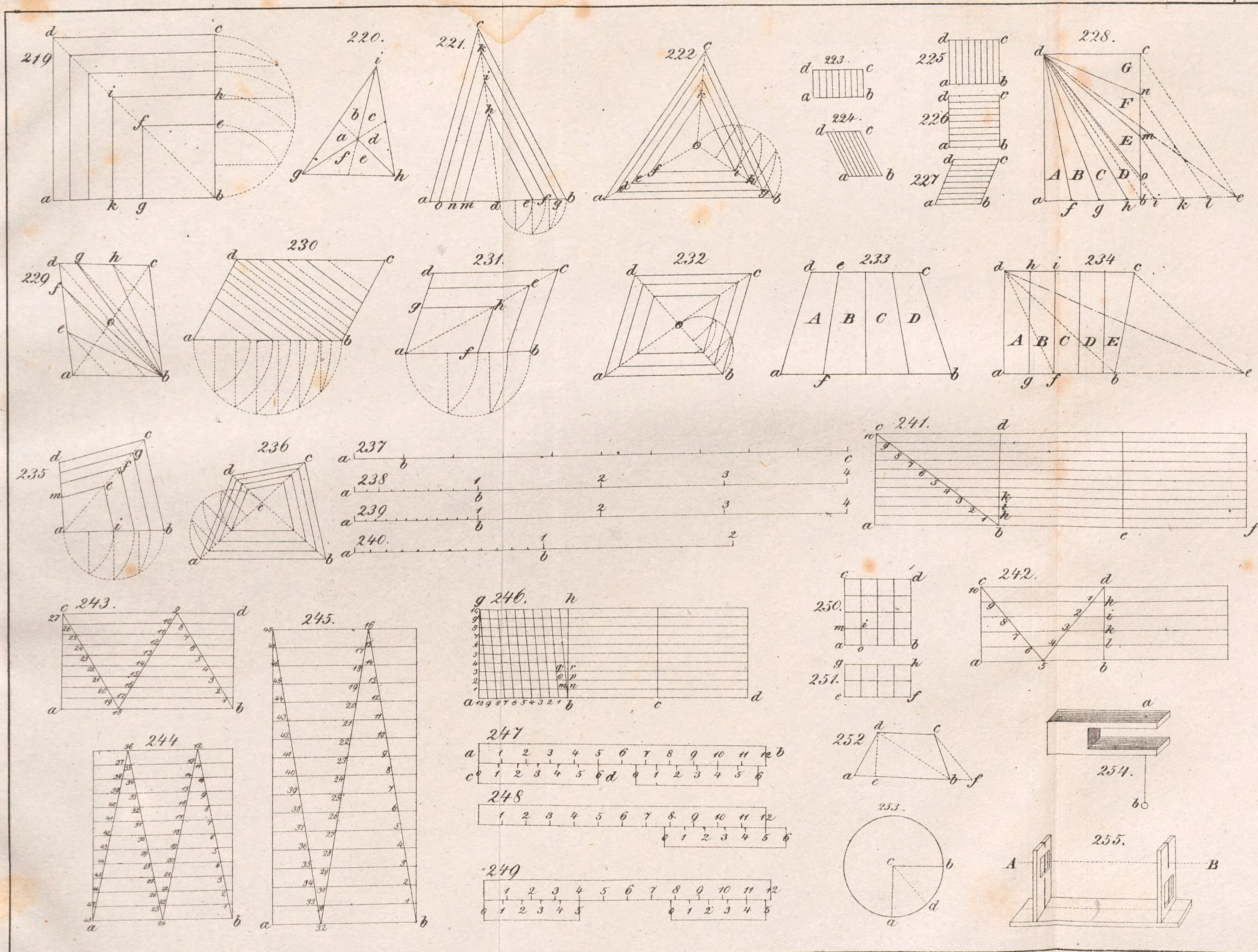
C. Dunzinger's lith. Anst. Nbg

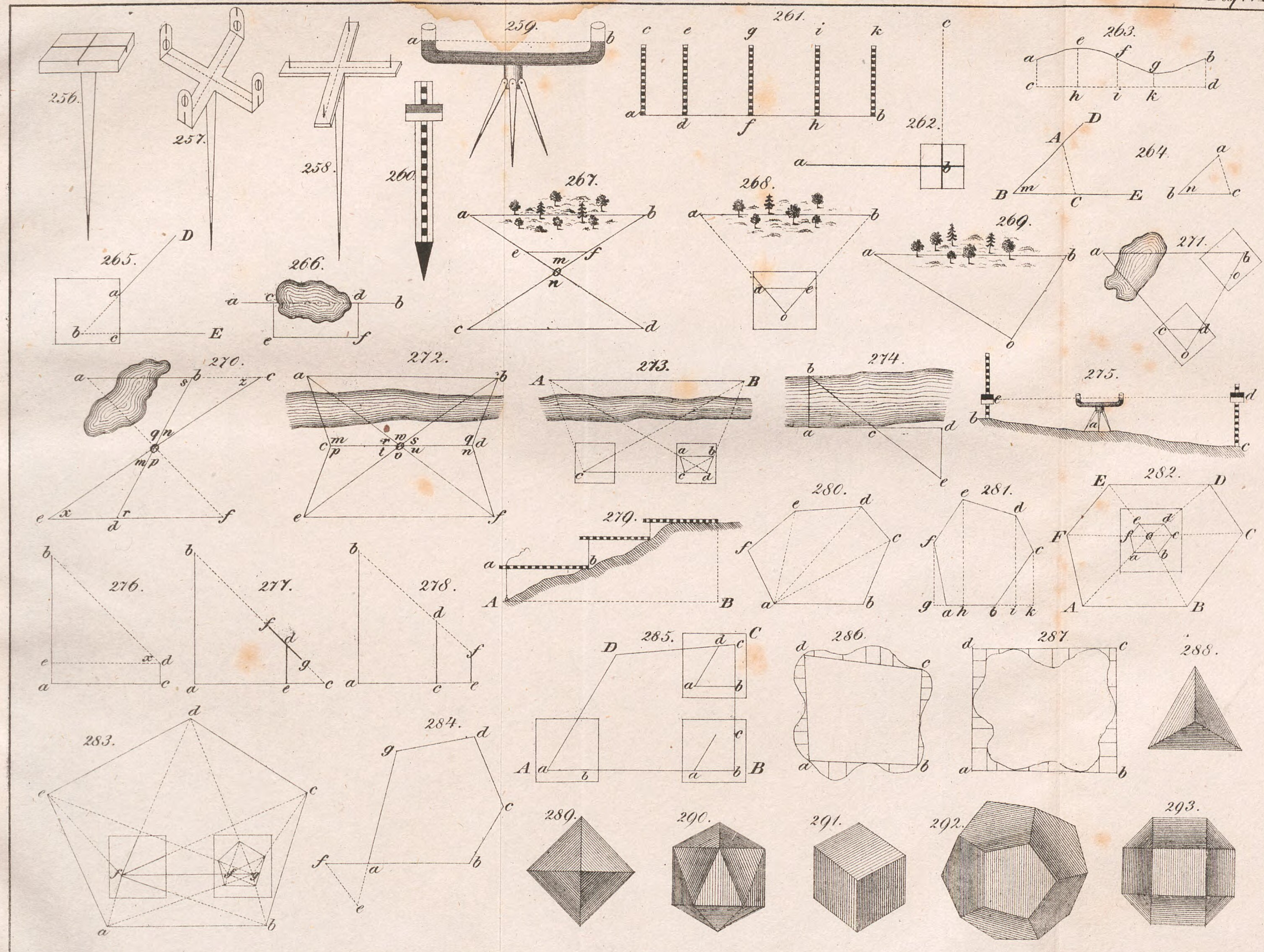


C. Dunzinger's lith. Anst. Nbg.

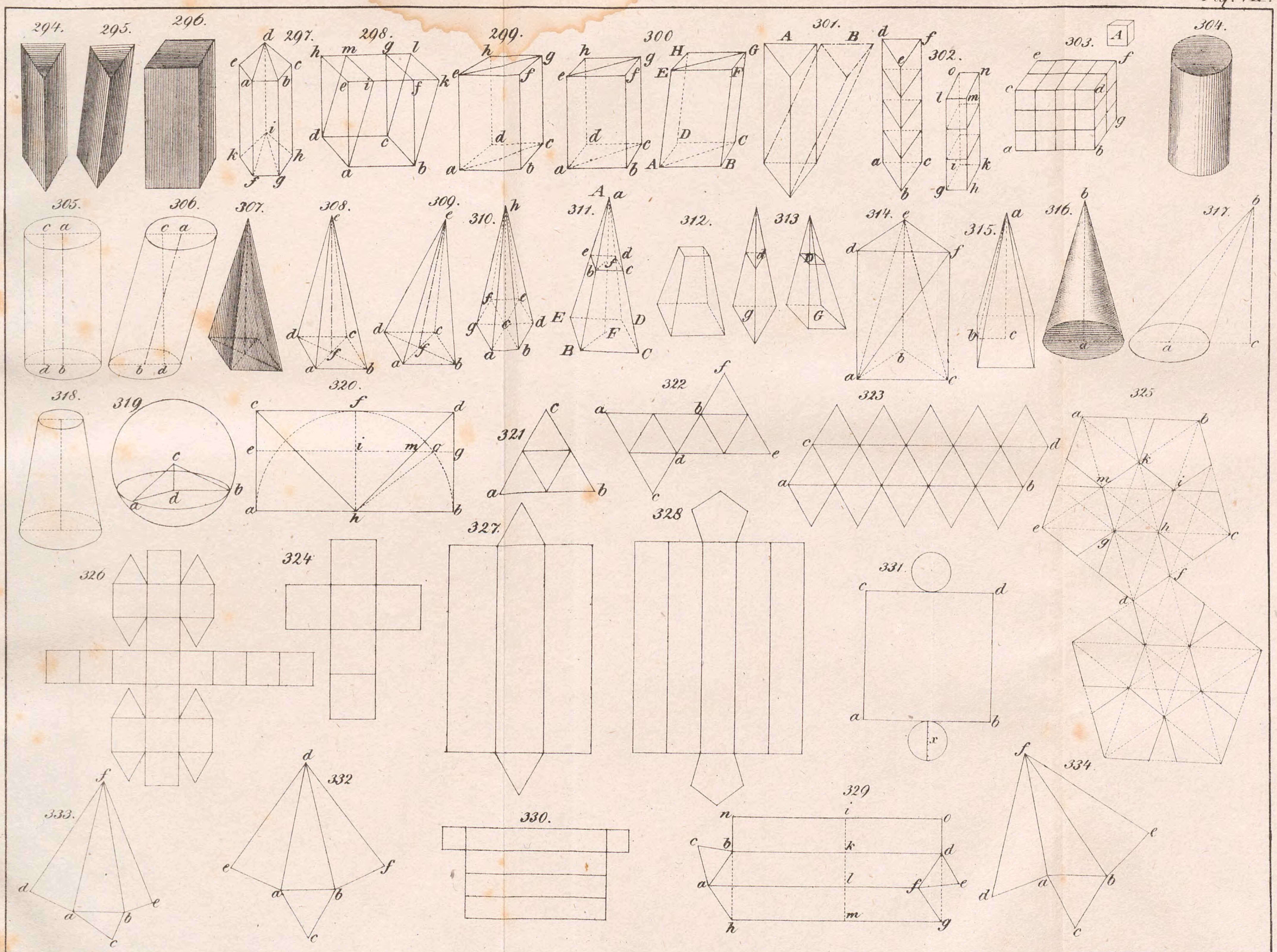


C. Dunzinger's lith. Anst. Nbg.

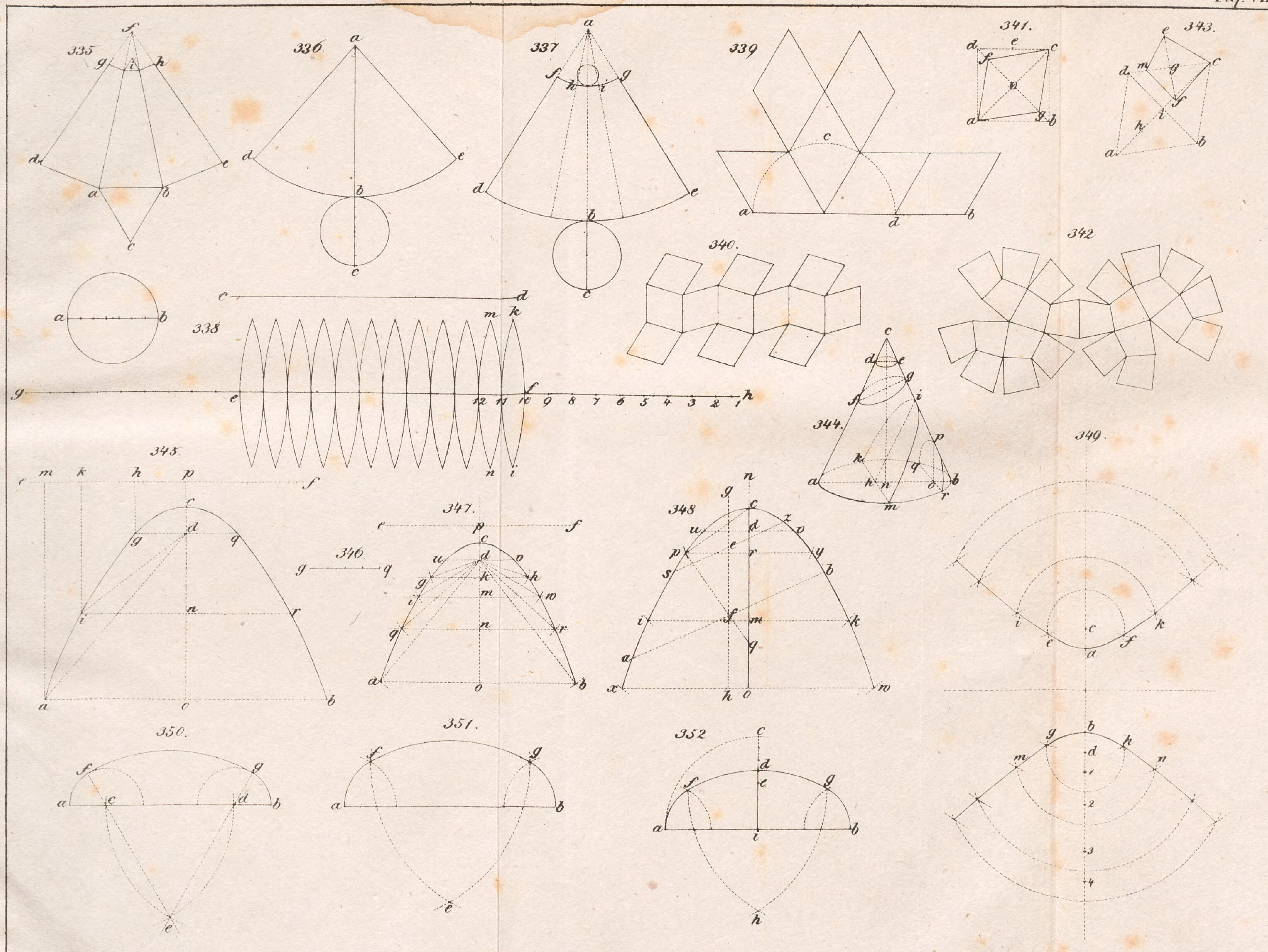

219.
220.
221.
222.
223.
224.
225
226
227
228.
229
230
231.
232
233
234.
235
236
237
238
239
240.
241.
242.
243.
244
245.
246.
247
248
249
250.
251.
252
253.
254.
255.



C. Dunringer's lith. Anst.



C. Dunzinger's lith. Anst. Nrnbg.



C. Dunzinger's lith. Anst. Nbg

Geometrie